Aalborg Universitet

B-studienævnet Det Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet

Tema:

Analyse og design af bærende konstruktioner

Titel:

Styrke- og stivhedsanalyse af aluminiumsskiver

Projektperiode:

2. september til 23. december 2005

Projektgruppe:

C129

Gruppemedlemmer:

Christian Linde Olsen Jens Rosenville Kasper Laigaard Skals Kristian Møller Jensen Lennart Skovbjerg Knudsen Martin Strømgaard Hansen

Vejleder:

Christian Frier

- Antal eksemplarer: 8
- Sideantal hovedrapport: 165
- Sideantal bilagsrapport: 57
- Sideantal forsøgsrapport: 47
- **Cd-bilag vedlagt**

Synopsis:

Denne rapport omhandler styrkeog stivhedsanalyse af aluminiumsskiver. Gennem undersøgelse af makroskopiske egenskaber for de givne skiver er det muligt at beskrive materialets virkemåde. Der tages i rapporten udgangspunkt i henholdsvis en homogen isotrop massiv cirkelskive og cirkelring af aluminium, der belastes af to linielaster, hvilke beregnes som enkeltlaster. For begge skiveelementer findes porøse udgaver heraf, hvor formålet med disse er, at modellere en homogen tilstand. De beregnede flytninger og spændinger, på baggrund af påført belastning, vurderes i forhold til både analytiske og numeriske løsninger. Til optimering af de numeriske beregninger er der programmeret to specialelementer. Udover de analytiske og numeriske modeller er der udført en række forsøg, hvor der er målt tøjninger og flytninger, hvilke er anvendt til at eftervise og analysere de optimale løsninger.

Forord

Denne 7. semesters rapport er udarbejdet af gruppe C129 under B-studienævnet ved Aalborg Universitets Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet. Temaet for rapporten er "Analyse og design af bærende konstruktioner".

Rapporten er opdelt i en række delafsnit for at skabe overblik. Opdelingen af rapporten er følgende:

- Indledning
- Enhedscelle
- Cirkelskive
- Cirkelring
- Konklusion
- Bilag
- Forsøg

Figurer, tabeller og ligninger er nummereret med fortløbende numre i hvert kapitel med tilhørende forklarende tekst og eventuel kildehenvisning. Kildehenvisninger gives i rapporten ved forfatterens efternavn og udgivelses år, hvilket er indrammet i skarpkantede parenteser:

[Efternavn, udgivelsesår]

Bagerst i hovedrapporten forefindes kildelisten. Til rapporten er der vedlagt en cd-rom, hvor rapporten findes i elektronisk udgave. Ydermere vedlægges udarbejdede programmer i CALFEM, toolbox til MATLAB, samt diverse beregningsark.

Christian Linde Olsen

Jens Rosenville

Kasper Laigaard Skals

Kristian Møller Jensen

Lennart Skovbjerg Knudsen

Martin Strømgaard Hansen

Indholdsfortegnelse

Del I Indledning

KAPITEL 1 INDLEDNING	15
----------------------	----

Del II Enhedscelle

KAPITEL	2 GIBSON ASHBY METODEN	27
KAPITEL	VOIGT OG REUSS ESTIMATER	
3.1	VOIGT ESTIMAT	
3.2	REUSS ESTIMAT	
KAPITEL	4 DILUTE OG SELVKONSISTENT ESTIMATER	
4.1	DILUTE ESTIMATET	41
4.2	Selvkonsistent estimat	45
KAPITEL	5 VURDERING AF ANALYTISKE ESTIMATER	47
KAPITEL	6 NUMERISK ANALYSE AF ENHEDSCELLE	
6.1	OPBYGNING AF BEREGNINGSMODEL FOR ENAKSET TØJNING	49
6.2	BESTEMMELSE AF ELASTICITETSMODULEN OG POISSONS FORHOLD	51
6.3	OPBYGNING AF MODEL FOR REN FORSKYDNING	
6.4	BESTEMMELSE AF FORSKYDNINGSMODULEN	55
6.5	Konvergensstudie	
6.5.1	Konvergens af enhedscelle med porøsitet 0,2	
6.5.2	Konvergens af enhedscelle med porøsitet 0,6	
KAPITEL	7 FORSØGSRESULTATER FOR ENHEDSCELLE	64
KAPITEL	28 VURDERING AF MATERIALEKONSTANTER	65

Del III Cirkelskive

KAPITEL	9 KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI	3
9.1	DEN BIHARMONISKE LIGNING	3
9.2	BELASTNING PÅ CIRKELSKIVEN	4
9.3	BESTEMMELSE AF SPÆNDINGSTILSTANDEN	5
KAPITEL	10 FOURIER-RÆKKER	9
10.1	SPÆNDINGSBEREGNING VED FOURIER-RÆKKER	9
KAPITEL	11 RITZ METODEN FOR MASSIV CIRKEL-SKIVE	4
11.1	GENEREL FREMGANG FOR RITZ METODEN	4

11.2	Eks	EMPEL PÅ FLYTNINGSFELT	
11.3	RES	ULTATER	
KAPITEI	. 12	RITZ METODEN FOR PORØS CIRKELSKIVE	
12.1	RES	ULTATER	
KAPITEI	. 13	NUMERISKE MODELLER AF CIRKELSKIVE	
13.1	Орв	BYGNING AF MODEL Q4s	
13.2	Орв	BYGNING AF MODEL Q8S	
13.3	Орв	BYGNING AF MODEL LSTS	
13.4	Орв	BYGNING AF MODEL SHES	
13.5	KON	NVERGENSSTUDIE AF CIRKELSKIVE	
13.5	.1	Konvergens af Q4s-model	
13.5	.2	Konvergens af Q8s-model	
13.5	.3	Konvergens af LSTs-model	
13.5	.4	Konvergens af spændingshybrid element	
13.5	.5	Sammenligning af modeller	
13.6	RES	ULTATER FOR MASSIV CIRKELSKIVE	
13.7	RES	ULTATER FOR PORØS CIRKELSKIVE	
KAPITEI	. 14	FORSØGSRESULTATER FOR CIRKELSKIVE	
KAPITEI	. 15	SAMMENLIGNING AF RESULTATER	
15.1	SAM	IMENLIGNING AF SPÆNDINGER	
15.2	SAM	IMENLIGNING AF FLYTNINGER OG POTENTIEL ENERGI	

Del IV Cirkelring

KAPITEL	L 16 VIRTUELLE KRÆFTERS PRINCIP	
16.1	Forudsætninger	
16.2	BEREGNING AF SNITKRÆFTER	
16.3	FLYTNINGER VED KOMBINATION AF VKP OG BJÆLKETEORI	
16.3.	1 Bernoulli-Euler bjælketeori	
16.3.	2 Timoshenko bjælketeori	
16.4	Flytninger ved de virtuelle kræfters princip	
KAPITEL	. 17 RITZ METODEN FOR MASSIV CIRKELRING	
17.1	RESULTATER	
KAPITEL	. 18 RITZ METODEN FOR PORØS CIRKELRING	
18.1	RESULTATER	
KAPITEL	. 19 NUMERISKE MODELLER AF CIRKELRING	
19.1	OPBYGNING AF MODEL BER	
19.2	OPBYGNING AF MODEL TR	
19.3	OPBYGNING AF MODEL Q4R	
19.4	OPBYGNING AF MODEL Q8R	

19.5	Орву	GNING AF MODEL SHER	150
19.6	Kon	/ERGENSSTUDIE AF CIRKELRING	150
19.6.	1	Konvergens af bjælkemodeller	150
19.7	RESU	LTATER FOR MASSIV CIRKELRING	152
19.8	Resu	LTATER FOR PORØS CIRKELRING	154
KAPITEL	20	FORSØGSRESULTATER FOR CIRKELRING	.155
KAPITEL	21	SAMMENLIGNING AF RESULTATER	.157
21.1	SAM	AENLIGNING AF FLYTNINGER	. 157

Del V Konklusion

KAPITEL	22	KONKLUSION	161
22.1	Enhe	DSCELLE	161
22.2	CIRK	ELSKIVE	161
22.3	Cirk	ELRING	162
KAPITEL	23	KILDELISTE	. 165

Bilag

BILAG A	STRAINGAGE TEORI	
A.1	STRAINGAGES	
A.2	WHEATSTONE BRO	
BILAG B	VIRTUELLE FLYTNINGERS PRINCIP FOR KRUMME BJÆLKER	175
B.1	GEOMETRISKE OVERVEJELSER OG ANTAGELSER	
B.2	OPSTILLING AF DE VIRTUELLE FLYTNINGERS PRINCIP	
BILAG C	FINITE ELEMENT METHOD	
C.1	POTENTIEL ENERGI FOR ET ELASTISK KONTINUUM	
BILAG D	ISOPARAMETRISKE LINEÆRE TØJNINGSTREKANTER	
D.1	ELEMENTETS EGENSKABER	
D.2	ELEMENTETS FORMFUNKTIONER	
D.3	TRANSFORMATIONSBETINGELSER	
D.4	ELEMENTETS TØJNINGS-FLYTNINGSFORHOLD	
D.5	KONSTITUTIVE FORHOLD	
D.6	ELEMENTETS STIVHEDSMATRICE	
D.7	SPÆNDINGER I ELEMENTET	
D.8	PATCH TEST	
D.8.1	Opbygning af patchen	
D.8.2	Patch test ved enakset træk langs x-aksen	
D.8.3	Patch-test ved enakset træk langs y-aksen	
D.8.4	Patch-test ved ren forskydning	
D.8.5	Ændring af overfladekræfter til knudekræfter	
D.9	Egenværdi test	
BILAG E	SPÆNDINGSHYBRID ELEMENT	
E.1	Komplementær energi	
E.2	MODIFICERET KOMPLEMENTÆR ENERGI	
E.3	ISOPARAMETRISK Q4 ELEMENT BASERET PÅ MODIFICERET KOMPLEMENTÆR ENERGI	

Forsøg

FORSØG	1 ALUMINIUMS MATERIALEPARAMETRE	
1.1	Fremgangsmåde	
1.2	RESULTATER	
1.2.	l Elasticitetsmodul	
1.2.	2 Poissons forhold	
1.2	3 Resultater fra øvrige grupper	
1.2.	4 Forskydningsmodul	
1.3	Usikkerheder	
1.4	MATERIALEPARAMETRE	
FORSØG	2 ENHEDSCELLER	
2.1	Fremgangsmåde	
2.2	Resultater	
2.3	Usikkerheder	
FORSØG	3 KALIBRERING AF FLYTNINGSMÅLERE	
3.1	Kalibrering af flytningsmåler 50014	
3.2	VURDERING	
FORSØG	4 MASSIV CIRKELSKIVE	
4.1	Fremgangsmåde	
4.2	RESULTATER FRA GAGES	
4.3	RESULTATER FRA FLYTNINGSMÅLERE	
4.4	Vurdering	
FORSØG	5 PORØS CIRKELSKIVE	
5.1	Fremgangsmåde	
5.2	RESULTATER	
5.3	VURDERING	
FORSØG	6 MASSIV CIRKELRING	
6.1	Fremgangsmåde	
6.2	RESULTATER	
6.2.	l Lodrette flytningsmålere	
6.2.	2 Vandrette flytningsmålere	
6.3	Vurdering	
FORSØG	7 PORØS CIRKELRING	
7.1	Fremgangsmåde	
7.2	RESULTATER	
7.2.	l Lodrette flytningsmålere	
7.2.	2 Vandrette flytningsmålere	
7.3	VURDERING	

Del I Indledning

Kapitel 1 Indledning

Beregninger af konstruktionselementer kan forekomme så komplekse, at opstilling af en eksakt analytisk løsning ikke er muligt. På baggrund af dette faktum ønskes approksimative løsninger i form af analytiske og numeriske modeller. I dette projekt opstilles, for to konstruktionsudformninger, modeller på baggrund af kinematiske, statiske og konstitutive betingelser, hvor forudsætninger og begrænsninger fastlægges. En numerisk beregning kan med tilstrækkelig beregningskapacitet gå mod den eksakte løsning, hvilket ofte er tidskrævende. På baggrund af dette kan resultatets nøjagtighed og kompleksitet vurderes i forhold til tidsforbrug og de tilnærmede analytiske løsninger. Til verificerering af de approksimative løsninger udføres forsøg.

Formålet med projektet er at skabe forståelse for teorierne bag de numeriske og analytiske metoder og på denne baggrund vurdere anvendelsesmuligheder, begrænsninger og resultaters nøjagtighed i forhold til kompleksitet og tidsforbrug. Udelukkende elasticitetsteoretiske problemstillinger bearbejdes.

I projektet tages udgangspunkt i en cirkelskive og en cirkelring, udført i aluminium, der betragtes som et homogent, isotropt og lineærelastisk materiale, hvor elasticitetsmodulen, E, og Poissons forhold, v, bestemmes eksperimentelt. Elementerne er vist på figur 1.1.



Figur 1.1: Elementerne i form af cirkelskive og cirkelring.

Materialeparametrene for de viste konstruktionselementer bestemmes ved trykbelastning af en aluminiumsklods, vist på figur 1.2, med dimensionerne $60 \times 30 \times 30$ mm.



Figur 1.2: Aluminiumsklods til bestemmelse af materialekonstanter for massive elementer.

Materialekonstanterne, henholdsvis elasticitetsmodul og Poissons forhold, for det massive element er bestemt til 78600 MPa og 0,31, hvilket ligeledes fremgår under beskrivelsen af forsøgselementerne. Forsøgsbeskrivelse og efterfølgende databehandling er foretaget i forsøg 1.

For begge konstruktionselementer undersøges indflydelsen af porøsiteter ved, at undersøge konstruktionselementer med borede huller, jf. figur 1.3.



Figur 1.3: Porøse udgaver af cirkelskive og cirkelring.

Ved beregning af de porøse elementer antages disse, at være homogene med ændrede materialeegenskaber i forhold til det oprindelige materiale. Generelt defineres porøsiteten som inklusioner i et matrixmateriale, hvilke har andre materialeegenskaber. Porøsiteten, der benyttes i projektet, er en simplificering af virkeligheden, i forhold til eksempelvis beton, hvor beskrivelse af strukturen er en kompleks problemstilling, hvor det ikke er muligt at opstille beregninger uden simplificeringer. I betonen er cementen matrixmaterialet hvor tilslag, luft og andre tilsætninger udgør inklusionerne, hvilket er vist på figur 1.4.



Figur 1.4: Udsnit af betonelement.

Ved beregning af konstruktionselementer på element niveau, benyttes entydige materialekonstanter, hvorved betonens mikrostruktur, sammenspillet mellem cement og inklusioner, ikke betragtes. Traditionelt bestemmes materialeegenskaberne eksperimentelt, hvilket kan være en omfattende og kompliceret proces for et kompositmateriale, hvorfor materialeegenskaberne med fordel kan bestemmes ved beregninger med udgangspunkt i materialets makrostruktur.

Denne problemstilling analyseres i projektets del II, hvor materialeegenskaberne estimeres ved henholdsvis analytiske, numeriske og eksperimentelle metoder. I projektet benyttes, som tidlige nævnt, en simplificering af virkeligheden, hvorved konstruktionselementerne eneste porøsitet udgøres af luft, i form af systematisk borede huller. Dette benyttes til opstilling af enhedscellen, der er et specialelement indenfor kontinuummekanikken. Med anvendelsen af enhedscellen bestemmes materialeegenskaberne på makroskopisk niveau ved at udtage et repræsentativt volumenelement, RVE, som typisk er af størrelsesordenen 0,1 mm³ for metaller. Det forudsættes af RVE undersøges så lille som muligt, men stor nok til at en analyse vil forklare materialets makroskopiske egenskaber.

I projektet er porøsiteterne foreskrevet, hvorved en enkelt enhedscelle udføres med dimensionerne $16 \times 16 \times 20$ mm, hvorved de makroskopiske egenskaber kan beskrives. Til verificering af de estimerede materialekonstanter udføres forsøg med to enhedscelleblokke, hvor 16 enhedsceller sættes sammen, jf. figur 1.5.



Figur 1.5: Sammensatte enhedsceller.

Begge forsøgsemner udføres med dimensionerne $64 \times 64 \times 20$ mm, hvorved porøsiteten, *f*, beregnet ved formel (1.1) er henholdsvis 0,20 og 0,60 for Ø8 og Ø14 huller.

$$f = 1 - \frac{V_P}{V_M} \tag{1.1}$$

Materialeegenskaberne estimeres analytisk ved forskellige metoder, fra cellulær struktur til mere generaliserede strukturer og antagelser. Elementmetoden, FEM, benyttes til numerisk beregning af enhedscellen. Til verificering af de beregnede resultater forelægges til sidst en samlet vurdering i forhold til eksperimentelt bestemte resultater.

På baggrund af materialeparametrene vil der i projektets del III blive foretaget beregninger af flytninger og spændinger, for massiv og porøs cirkelskive. Forskellen på beregningerne består udelukkende i anvendelse af andre materialeparametre. Illustration af cirkelskiven, som henholdsvis massiv og porøs, ses på figur 1.6.



Figur 1.6: Massiv og porøs cirkelskive.

Den porøse cirkelskive udføres med 80 stk. Ø8 huller med en indbyrdes afstand, c/c, på 16 mm. For skiverne defineres det effektive areal, A, som arealet af det massive materiale. Geometriske konstanter for cirkelskiven er opstillet i tabel 1.1.

	Massiv cirkelskive	Porøs cirkelskive
Radius, R	79 mm	79 mm
Tykkelse, t	20 mm	20 mm
Effektivt areal, A	19607 mm ²	15718 mm ²
Porøsitet, f	0	0,20

 Tabel 1.1: Geometriske konstanter for massiv og porøs cirkelskive.

Skiverne analyseres ved anvendelse af kompleks funktionsteori, Ritz metoden og Fourierrækker. Numerisk beregnes skiven ved en række forskellige elementtyper, hvor der programmeres to specialelementer i form af en lineær tøjningstrekant og et spændingshybridelement. For elementerne udføres konvergensstudie. Til verificering af de beregnede resultater forelægges til sidst en samlet vurdering i forhold til eksperimentelt bestemte resultater.

Til beregningerne opstilles et statisk system, hvilket er specificeret i hvert enkelt afsnit. Imidlertid bemærkes det, at udelukkende en kvart cirkelskive betragtes, grundet dobbeltsymmetri, jf. figur 1.7.



Figur 1.7: Cirkelskive med flytningsfelt.

Figur 1.7 viser cirkelskiven påvirket af to punktlaster, som medfører diskontinuitet i punkterne, hvor enkeltkræfterne påføres. Dette stemmer imidlertid ikke overens med virkeligheden, da belastningen eksperimentelt påføres over et areal. I projektet antages linielasterne at virke som punktlaster.

De elastiske kontanter for cirkelskiven er beregnet i del II og resultaterne er opstillet i tabel 1.2.

	Massiv cirkelskive	Porøs cirkelskive
Elasticitetsmodul, E	78600 MPa	48000 MPa
Poissons forhold, v	0,313	0,343
Forskydningsmodul, G	29930 MPa	25600 MPa

 Tabel 1.2: Elastiske konstanter for cirkelskiven.

I projektets del IV beregnes cirkelringen henholdsvis massiv og porøs, hvilket er illustreret på figur 1.8.



Figur 1.8: Massiv og porøs cirkelring.

Den porøse cirkelring udføres med 76 stk. Ø8 huller med en indbyrdes afstand, c/c, på 16 mm. Geometriske konstanter for cirkelringene er opstillet i tabel 1.3.

	Massiv cirkelring	Porøs cirkelring
Ydre radius, R	79 mm	79 mm
Indre radius, r	24 mm	24 mm
Tykkelse, t	20 mm	20 mm
Effektivt areal, A	17797 mm ²	14223 mm ²
Porøsitet, f	0	0,20

 Tabel 1.3: Geometriske konstanter for massiv og porøs cirkelring.

Analytisk benyttes Ritz metoden og teorien for krumme bjælker, herunder Bernouilli-Euler og Timoshenko, som udledes ved benyttelse af det virtuelle arbejdes princip, VAP. Numeriske modeller benyttes med forskellige skiveelementtyper, foruden inddeling i rette Bernouilli-Euler og Timoshenko bjælkeelementer. De elastiske kontanter for cirkelringen er bestemt i del II og resultaterne er opstillet i tabel 1.4.

	Massiv cirkelring	Porøs cirkelring
Elasticitetsmodul, E	78600 MPa	48000 MPa
Poissons forhold, v	0,313	0,343
Forskydningsmodul, G	29930 MPa	25600 MPa

 Tabel 1.4: Elastiske konstanter for cirkelring.

Del II Enhedscelle

Delindledning

I de følgende kapitler estimeres materialeparametrene for henholdsvis den porøse cirkelskive og cirkelring. Udgangspunktet for estimaterne er de eksperimentelt bestemte materialekonstanter for det massive element, påvirket ved enakset tryk.

De elastiske materialekonstanter beregnes analytiske ved forskellige metoder, hvilke benævnes henholdsvis Gibson Ashby, Dilute, Selvkonsistente samt Voigt & Reuss estimater. Estimaterne bestemmer materialeegenskaberne således, at disse har samme egenskaber som et isotropt, lineært elastisk materiale. De forskellige estimater sammenlignes, hvorved fordele og ulemper fremhæves for de enkelte modeller. Efterfølgende beregnes materialekonstanterne ved numeriske metoder i form af FEM analyse. Til verificering af de analytiske og numerisk beregnede materialekonstanter udføres forsøg, hvorved det vurderes hvilken metode, der giver det mest præcise estimat.

Til estimering af parametre benyttes udleverede noter [Myhre, 2005] med mindre andet angives.

Kapitel 2 Gibson Ashby metoden

Ved benyttelse af Gibson Ashby metoden betragtes et repræsentativt udsnit af prøvelegemet, som illustreret på figur 2.1.



Figur 2.1: Repræsentativt udsnit af prøvelegemet.

Dette udsnit simplificeres til en kubisk celle, som vist på figur 2.2.



Figur 2.2: Udsnit af prøvelegeme betragtes som en kubisk celle.

Hvis porøsiteten er stor kan cellestrukturen betragtes ved hjælp af Bernoulli-Euler bjælketeori, hvor cellesiderne betragtes som tynde bjælker der antages at deformere som vist på figur 2.3.



Figur 2.3: Enhedscellen med udbøjning af cellevæg ved enakset tryk.

Densiteten af cellevæggene bestemmes ved formel (2.1).

$$\rho_M = \frac{m}{V_M} = \frac{m}{c_1 L^2 t} \tag{2.1}$$

hvor

 $\begin{array}{ll} \rho_{\rm M} & \mbox{er densiteten af cellevæggene} \\ m & \mbox{er massen af cellen} \\ V_{\rm M} & \mbox{er volumen af cellevæggene} \\ L & \mbox{er længden og højden af cellevæggene} \\ t & \mbox{er tykkelsen af cellevæggene} \end{array}$

 c_1 er en konstant, der afhænger af cellens geometri

Densiteten af det cellulære materiale beregnes ved formel (2.2).

$$\rho_P = \frac{m}{V_P} = \frac{m}{L^3} \tag{2.2}$$

hvor

$ ho_P$	er densiteten af det cellulære materiale
V_P	er volumen af det cellulære materiale

Herfra kan forholdet ρ_P / ρ_M skrives ved formel (2.3).

$$\frac{\rho_P}{\rho_M} = c_1 \frac{t}{L} \tag{2.3}$$

I henhold til udbøjningen af bjælkerne kan tøjningen for bjælken opskrives ved formel (2.4), og spændingerne igennem cellen opskrives ved formel (2.5).

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.4}$$

$$\sigma = \frac{c_2 F}{L^2} \tag{2.5}$$

hvor

Е	er tøjningen
δ	er nedbøjningen af bjælken
σ	er spændingen
c_2	er en konstant, der afhænger af cellens geometri
F	er belastningen

Fra Bernoulli-Euler bjælketeori haves (2.6), som er en relation mellem kraft og flytning.

$$F = c_3 \frac{\delta E_M I}{L^3} \tag{2.6}$$

hvor

c_3	er en konstant, der afhænger af understøtningerne
E_M	er elasticitetsmodulen for cellevægsmaterialet
Ι	er inertimomentet af cellevæggen

Formel (2.4) og (2.6) indsættes i (2.5) og herfra fås formel (2.7).

$$\sigma = c_2 c_3 \frac{1}{12} E_M \frac{t^3}{L^3} \varepsilon$$
(2.7)

hvor

$$c_2 c_3 \frac{1}{12} E_M \frac{t^3}{L^3}$$
 er elasticitetsmodulen for porøst materiale, E_P

Ved omskrivning af formel (2.3) haves formel (2.8).

$$\frac{t^3}{L^3} = \left(\frac{\rho_P}{c_1 \rho_M}\right)^3 \tag{2.8}$$

Indsættes formel (2.8) i (2.7) fås formel (2.9).

$$E_P = \frac{c_2 c_3}{12} E_M \left(\frac{\rho_P}{c_1 \rho_M}\right)^3 \Longrightarrow \frac{E_P}{E_M} = c \left(\frac{\rho_P}{\rho_M}\right)^3$$
(2.9)

hvor

E_P er elasticitetsmodulen af det cellulære materiale
 c er en konstant der sættes lig 1 grundet forsøg med cellens geometri og understøtningsforhold

Relationen mellem densitet og porøsitet beskrives ved formel (2.10).

$$\rho_P = \rho_M \left(1 - f \right) \tag{2.10}$$

hvor

f er porøsiteten

Herved kan formel (2.9) omskrives til formel (2.11).

$$\frac{E_P}{E_M} = (1 - f)^3$$
(2.11)

På figur 2.4 er forholdet mellem elasticitetsmodulerne som funktion af *f* optegnet.



Figur 2.4: Relativt elasticitetsmodul for Gibson Ashby metoden.

På baggrund af dette gives estimatet for elasticitetsmodulet ved formel (2.12).

$$E_P = \left(1 - f\right)^3 \cdot E_M \tag{2.12}$$

Gibson Ashby estimatet beregnes ved formel (2.12) for en porøsitet på henholdsvis 0,2 og 0,6, idet elasticitetsmodulen eksperimentelt bestemmes ved disse porøsiteter.

$$E_{p}^{0,2} = (1-0,20)^{3} \cdot 78600 = 40243 \text{ MPa}$$

 $E_{p}^{0,2} = (1-0,60)^{3} \cdot 78600 = 5030 \text{ MPa}$

Kapitel 3 Voigt og Reuss estimater

Voigt og Reuss er analytiske estimater, hvor der tages udgangspunkt i et repræsentativt volumen element, RVE, illustreret på figur 3.1.



Figur 3.1: Illustration af repræsentativt volumenelement, RVE.

I et RVE forudsættes voluminerne kendt for både matrixmaterialet og inklusionerne Ω_1 , $\Omega_2, ..., \Omega_n$. Yderligere forudsættes de konstitutive ligninger for inklusionerne, at kunne beregnes ved formlerne (3.1) og (3.2), da lineærelastisk materiale betragtes.

$$\sigma_{ii}^c = D_{iikl}^c \varepsilon_{kl}^c \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{ii}^c = C_{iikl}^c \sigma_{kl}^c \tag{3.2}$$

hvor

()^c betegner inklusioner i RVE D_{ijkl} er den konstitutive tensor C_{ijkl} er fleksibilitetstensoren, $C = D^{-1}$

Estimering ved Voigt og Reuss giver henholdsvis en øvre- og nedreværdi løsning til de eksakte materialekonstanter. Dette kan illustreres ved en kompositbjælke, bestående af fibermateriale og matrixmateriale, under enakset træk, jf. figur 3.2.



Figur 3.2: Kompositbjælke belastet ved enakset træk.

Under forudsætning af perfekt binding mellem fibrene og matrixmaterialet vil variationen af materialernes retning med vandret, θ , give de eksakte værdier ved henholdsvis 0° og 90°.

Dette ses ved betragtning af vinklen 90°, hvor der opstår en serieforbindelse og de svageste led bliver afgørende for bjælkens styrke. Bjælkens maksimale styrke findes ved 0°, parallelforbindelse, hvor de stærkeste led kan belastes maksimalt.

3.1 Voigt estimat

Den samlede spænding for et RVE kan bestemmes ved formel (3.3)

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V} \sigma_{ij}^{lokal} dV = \frac{1}{V} \left[\int_{V-\Omega} D_{ijkl}^{M} \varepsilon_{kl}^{M} dV + \int_{\Omega_{1}} D_{ijkl}^{1} \varepsilon_{kl}^{1} dV + \dots + \int_{\Omega_{n}} D_{ijkl}^{N} \varepsilon_{kl}^{N} dV \right]$$
(3.3)

hvor

 σ^{lokal} er den lokale spænding i RVE $()^M$ refererer til matrixmaterialet $()^N$ refererer til den N'te komponent i RVE

Ved benyttelse af Voigt estimat antages plan tøjningstilstand. Yderligere vælges kinematisk tilladelige flytningsfelter, hvorved (3.4) er gældende.

$$\varepsilon_{ij}^{M} = \varepsilon_{ij}^{1} = \dots = \varepsilon_{ij}^{N}$$
(3.4)

Dette bevirker, at formel (3.3) kan omskrives til formel (3.5).

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \left[\int_{V-\Omega} D^M_{ijkl} dV + \int_{\Omega_l} D^1_{ijkl} dV + \dots + \int_{\Omega_N} D^N_{ijkl} dV \right] \varepsilon_{kl}$$
(3.5)

Ved benyttelse af relationen i formel (3.6) omskrives (3.5) til formel (3.7).

$$D_{ijkl}^{Voigt} = \frac{1}{V} \left[\int_{V-\Omega} D_{ijkl}^{M} dV + \int_{\Omega_{1}} D_{ijkl}^{1} dV + \dots + \int_{\Omega_{n}} D_{ijkl}^{n} dV \right]$$
(3.6)

$$\sigma_{ij} = \frac{V - \Omega}{V} D^M_{ijkl} + \frac{\Omega_1}{V} D^1_{ijkl} + \dots + \frac{\Omega_n}{V} D^n_{ijkl}$$
(3.7)

Dette kan skrives på formen.

$$D_{ijkl}^{Voigt} = \sum_{n=1}^{n} c_n D_{ijkl}^n , \quad 0 \le c_n \le 1 , \quad \sum c_n = 1$$
(3.8)

hvor

 c_n er den relative volumenandel

For et porøst materiale med kun én type porøsitet, kan formel (3.8) omskrives til formel (3.9).

$$E_{porøst}^{Voigt} = (1 - f)E_M + f \cdot E_P \tag{3.9}$$

hvor

 E_M er elasticitetsmodulen for matrixmaterialet E_P er elasticitetsmodulen for det porøse materiale

I forsøgsemnerne udgøres porøsiteten af luft, elasticitetsmodulen er lig nul, og dermed kan formel (3.9) omskrives til formel (3.10).

$$E_{porøst}^{Voigt} = (1 - f)E_M \tag{3.10}$$

For det massive materiale er elasticitetsmodulen bestemt eksperimentelt til 78600 MPa, hvorved de forventede elasticitetsmoduler beregnes ved formel (3.10).

$$E_{porøst 0,2}^{Voigt} = (1-0,20) \cdot 78600 = 62880 \text{ MPa}$$

 $E_{porøst 0,6}^{Voigt} = (1-0,60) \cdot 78600 = 31440 \text{ MPa}$

Ved opstilling af den relative elasticitetsmodul i forhold til porøsiteten fremkommer formel (3.11).

$$\frac{E_{poros}^{Voigt}}{E_M} = 1 - f \tag{3.11}$$

Forholdet er illustreret på figur 3.3.



Figur 3.3: Relativt elasticitetsmodul som funktion af porøsiteten for Voigt estimatet.

Randbetingelserne for Voigt estimatet stemmer overens med det forventede, da den relative elasticitetsmodul er 1 ved porøsiteten 0, og 0 ved porøsiteten 1. Ydermere bemærkes, at forholdet beskriver øvreværdien for elasticitetsmodulen.

Forholdet mellem det massive og porøse materiale blev bestemt med den konstitutive matrice som funktion af henholdsvis elasticitetsmodulen og Poissons forhold. Imidlertid kan disse bestemmes entydigt ved anvendelse af formel (3.12).

$$[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{P}}] = (1 - f)[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{M}}]$$
(3.12)

hvor

 $\begin{bmatrix} D_p \end{bmatrix} \quad \text{er tøjningstensoren for det porøse materiale} \\ \begin{bmatrix} D_M \end{bmatrix} \quad \text{er tøjningstensoren for det massive materiale} \end{bmatrix}$

Ved benyttelse af Voigt estimatet antages plan tøjningstilstand, hvorved den konstitutive matrice kan opskrives ved formel (3.13).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$
(3.13)

Ved benyttelse af ovenstående er det muligt at opstilles tre ligninger med to ubekendte, hvilket imidlertid reduceres til to ligninger, da ligningerne ved første og anden række udgør den samme ligning. Ved benyttelse af første række i tøjningsmatricerne opstilles formel (3.14) for elasticitetsmodulen for det porøse materiale.

$$\frac{E_{P}}{(1+\nu_{P})(1-2\nu_{P})} [(1-\nu_{P})+\nu_{P}] = (1-f) \frac{E_{M}}{(1+\nu_{M})(1-2\nu_{M})} [(1-\nu_{M})+\nu_{M}]$$

$$(3.14)$$

$$E_{P} = -(-1+f) \frac{E_{M}}{(1+\nu_{M})(1-\nu_{M})} \cdot (1+\nu_{P})(-1+2\nu_{P})$$

Ligeledes opstilles formel (3.15) for Poissons forhold ved anvendelse af tredje række.

$$\frac{E_{P}}{(1+\nu_{P})(1-2\nu_{P})} \left[\frac{1-2\nu_{P}}{2}\right] = (1-f)\frac{E_{M}}{(1+\nu_{M})(1-2\nu_{M})} \left[\frac{1-2\nu_{M}}{2}\right]$$

$$(3.15)$$

$$\nu_{P} = -\frac{E_{P}+E_{P}\cdot\nu_{P}-E_{M}+E_{M}\cdot f}{(-1+f)E_{M}}$$

Ved løsning af disse ligningssystemer bestemmes materialeparametrene, cd-bilag. Resultaterne er angivet i tabel 3.1.

	Porøsitet 0,2	Porøsitet 0,6
Elasticitetsmodul, E_P	62880 MPa	31440 MPa
Poissons forhold, v _P	0,313	0,313

 Tabel 3.1: Materialeparametre beregnet ved Voigt estimatet.

Det bemærkes at Poissons forhold beregnes til samme værdi uafhængigt af hvilken beregningsmetode, der benyttes.

3.2 Reuss estimat

Den samlede tøjning for det RVE beregnes ved formel (3.16).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V} \varepsilon_{ij}^{lokal} dV = \frac{1}{V} \left[\int_{V-\Omega} C^{M}_{ijkl} \sigma^{M}_{kl} dV + \int_{\Omega_{1}} C^{1}_{ijkl} \sigma^{1}_{kl} dV + \dots + \int_{\Omega_{n}} C^{n}_{ijkl} \sigma^{n}_{kl} dV \right]$$
(3.16)

hvor

 ε^{lokal} er den lokale tøjning i det RVE

Ved bestemmelse af Reuss estimatet antages plan spændingstilstand samt statisk tilladelige flytningsfelter. Reuss estimatet beregnes ved samme procedure som Voigt estimatet, hvorved (3.17) fremkommer.

$$C_{ijkl}^{Reuss} = \sum_{n=1}^{n} c_n C_{ijkl}^n , \quad 0 \le c_n \le 1 , \quad \sum c_n = 1$$
(3.17)

I projektet benyttes luft som porøsitet, med elasticitetsmodul lig 0, hvorved Reuss estimatet opskrives ved formel (3.18).

$$C_{ijkl}^{Reuss} = (1 - f) \cdot C_M \tag{3.18}$$

For Reuss estimatet forudsættes plan spændingstilstand, hvorved fleksibilitetstensoren opskrives ved formel (3.19).

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{D}]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$
(3.19)

Ved elasticitetsmodulen lig 0, hvorved formel (3.19) ikke kan benyttes til bestemmelse af materialeegenskaberne. Ved benyttelse af tøjningstensoren opskrives Reuss estimatet ved formel (3.20).

$$\frac{1}{D_{Poros}^{Reuss}} = C_M \cdot \frac{1}{D_M}$$
(3.20)

Ved fastholdelse af den relative porøsitet, C_M , opstilles udtrykket (3.21).

$$\frac{1}{D_{Poros}^{Reuss}} \to \infty \quad for \quad D_M \to 0 \tag{3.21}$$

Dette grænsetilfælde medfører udtrykket (3.22).

$$D_{Poros}^{Reuss} \simeq 0 \quad for \quad D_M \to 0$$

$$(3.22)$$

Dette bevirker at der ikke kan gives en entydig løsning til elasticitetmodulen ved Reuss estimater. Imidlertid er det vist, at Reuss er en nedreværdiløsning, hvorved elasticitetsmodulen ikke kan antage negative værdier, hvilket stemmer overens med det forventede.

Kapitel 4 Dilute og Selvkonsistent estimater

Et homogent RVE, belastet af en kraft, t_i^s , antages ikke påvirket af indre massekræfter. Legemet antages at være i ligevægts, hvorved den lokale spændingstensor er uden divergens, hvilket er beskrevet i formel (4.1).

$$\sigma_{ij,j}^{lokal} = 0 \tag{4.1}$$

Definition af Kroneckers delta indføres ved formel (4.2).

$$x_{i,j} = \delta_{ij} \tag{4.2}$$

Ved benyttelse af den lokale spændingstensor og Kroneckers delta, jf. formel (4.1) og (4.2) opskrives formel (4.3).

$$\sigma_{ij}^{lokal} = (\sigma_{ik}^{lokal} x_j)_{,k} = \sigma_{ik,k}^{lokal} x_j + \sigma_{ik}^{lokal} x_{j,k} = \sigma_{ik}^{lokal} \delta_{ij}$$

$$(4.3)$$

Spændingen for et RVE på makroskopisk niveau bestemmes ved formel (4.4).

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V} \sigma_{ij}^{lokal} dV \tag{4.4}$$

Dette omskrives til formel (4.5) ved benyttelse af Kroneckers delta, formel (4.3), og Gauss' integralsætning.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V} \left(\sigma_{ik}^{lokal} x_{j} \right)_{,k} dV = \frac{1}{V} \int_{S} \sigma_{ik}^{lokal} x_{j} n_{k} dS$$

$$\tag{4.5}$$

Grundet ligevægt for det RVE kan formel (4.6) opstilles for randen.

$$\sigma_{ij}^{lokal} n_j = t_i^s \tag{4.6}$$

Spændingen på det makroskopiske niveau omskrives til formel (4.7) ved indførelse af formel (4.6) i (4.5).

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_{S} t_i^s x_j dS \tag{4.7}$$
Ved benyttelse af Dilute- og Selvkonsistente estimater betragtes det RVE indeholdende inhomogeniteter i form af spændingsfrie huller, som forstyrrer det inde spændingsfelt. Det RVE er illustreret på figur 4.1, hvor det totale volumen og hele randen betegnes henholdsvis V og S. Randen af inhomogeniteter betegnes S_I , mens det totale volumen fratrukket inhomogeniteternes volumen betegnes M.



Figur 4.1: *RVE ved Dilute- og selvkonsistente estimater.*

Dermed opskrives spændingen ved formel (4.8).

$$\sigma_{ij} = \int_{M} \sigma_{ij}^{lokal} dV \tag{4.8}$$

Tøjningen, på det makroskopiske niveau, er imidlertid ikke lig den gennemsnitlige lokale tøjning, hvorfor formel (4.9) opskrives.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V} \varepsilon_{ij}^{lokal} dV = \overline{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}^{c}$$
(4.9)

hvor

 $\bar{\varepsilon}_{ij}$ er tøjningen for det homogene tilfælde ε_{ij}^{c} er tillægstøjningen, der forekommer ved tilstedeværelsen af porøsiteter

Til beregning af tillægstøjningen opstilles to lasttilfælde. Første lasttilfælde opstilles ved en virtuel homogen spændingstilstand på det RVE samt randen af huller, hvilket er givet ved (4.10).

$$t_i^1 = \begin{cases} n_j \delta \sigma_{ij} & \text{på S} \\ n_j \delta \sigma_{ij} & \text{på S}_1 \end{cases}$$
(4.10)

hvor

 n_i er normalvektoren

 $\delta \sigma_{ii}$ er en vilkårlig virtuel plan spænding

Ligeledes forudsættes plan tøjningstilstand, hvorved flytningen bestemmes ved formel (4.11).

$$u_i^1 = x_j \delta \varepsilon_{ij} = x_j C_{ijkl} \delta \sigma_{kl} \tag{4.11}$$

Det andet lasttilfælde beskriver den virkelige spændingstilstand, jf. (4.12).

$$t_i^2 = \begin{cases} n_j \sigma_{ij} & \text{på S} \\ 0 & \text{på S}_1 \end{cases}$$
(4.12)

Den tilhørende tøjningstilstand er givet ved (4.13).

$$u_i^2 = u_i^{lokal} = x_j \varepsilon_{ij}^{lokal} = x_j C_{ijkl}^{lokal} \sigma_{kl}^{lokal}$$

$$\tag{4.13}$$

Den reciprokke sætning indføres ved formel (4.14).

$$\int_{S} t_{i}^{1} u_{i}^{2} dS = \int_{S} t_{i}^{2} u_{i}^{1} dS$$
(4.14)

Ved benyttelse af formel (4.14) for de to lasttilfælde opstilles (4.15).

$$\int_{S_{1}} (n_{1} \delta \sigma_{kl}) u_{k}^{lokal} dS + \int_{S_{1}} (n_{1} \delta \sigma_{kl}) u_{k}^{lokal} dS = \int_{S} (n_{j} \sigma_{ij}) u_{i}^{1} dS$$

$$(4.15)$$

$$\delta \sigma_{kl} \left(\int_{S} (n_{m} \sigma_{im}) x_{j} C_{ijkl} dS - \int_{S} n_{1} u_{k}^{lokal} dS - \int_{S_{1}} n_{1} u_{k}^{lokal} dS \right) = 0$$

Den virtuelle spænding er vilkårlig og symmetrisk, hvorved det er nødvendigt for indholdet af parentesen i formel (4.15), at den asymmetriske del er lig 0, formel (4.16).

$$\int_{S} (n_{m} \sigma_{im}) x_{j} C_{ijkl} dS - \frac{1}{2} \int_{S} (n_{1} u_{k}^{lokal} + n_{k} u_{1}^{lokal}) dS - \frac{1}{2} \int_{S_{1}} (n_{1} u_{k}^{lokal} + n_{k} u_{1}^{lokal}) dS = 0$$
(4.16)

Da fleksibilitetstensoren ikke varierer med positionen, kan den første integration i formel (4.16) bestemmes ved (4.17), hvor ligevægt og Gauss' divergensteori benyttes.

$$\int_{S} n_{m} \sigma_{ij} x_{j} C_{ijkl} dS = C_{ijkl} \int_{S} (\sigma_{im} x_{j}) n_{m} dS = C_{ijkl} \int_{V} (\sigma_{im} x_{j})_{,m} dV = C_{ijkl} \int_{V} \sigma_{im} x_{j,m} dV = C_{ijkl} \int_{V} \sigma_{im} \delta_{jm} dV = \overline{\varepsilon} V$$

$$(4.17)$$

For et homogent materiale, uden revner, kan tøjningen opskrives ved formel (4.18).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{S} \left(u_i^{lokal} n_j + u_j^{lokal} n_i \right) dS \tag{4.18}$$

Ved benyttelse af formel (4.9), (4.16), (4.17) og (4.18) bestemmes tillægstøjningen ved (4.19).

4.1 Dilute Estimatet

Ved benyttelse af Dilute estimatet tages der udgangspunkt i et RVE, som indeholder periodiske rækker med cirkulære huller, jf. figur 4.2.



Figur 4.2: Materiale med periodiske cirkulære huller.

For det RVE forudsættes plan spændingstilstand, hvorved den konstitutive betingelse er givet ved formel (4.20).

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{E} \left((1+\nu) \sigma_{\alpha\beta} - \nu \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \right)$$
(4.20)

For inhomogeniteterne, jf. formel (4.19), beregnes tøjningstillægget i polære koordinater ved formel (4.21).

$$\varepsilon_{ij}^{c} = -\frac{1}{2b^{2}} \int_{0}^{2\pi} \left(u_{i}^{lokal} n_{j} + u_{j}^{lokal} n_{i} \right) a d\theta$$

$$(4.21)$$

Til bestemmelse af flytninger på randen benyttes en standard løsning, som er beskrevet ved parametrene i (4.22), og udviklet for et kontinuum med stor afstand mellem belastning og hul.

$$n_{1} = -\cos(\theta)$$

$$n_{2} = -\sin(\theta)$$

$$u_{1}^{lokal} = u_{r}\cos(\theta) - u_{\theta}\sin(\theta)$$

$$u_{2}^{lokal} = u_{r}\sin(\theta) - u_{\theta}\cos(\theta)$$

$$u_{r} = \frac{\sigma_{11}}{2E} \left((1+v) \left(r - \frac{a^{4}}{r^{3}} \right) \cos(2\theta) + \frac{4a^{2}}{r}\cos(2\theta) + (1+v)\frac{a^{2}}{r} + (1-v)r \right)$$

$$u_{\theta} = -\frac{\sigma_{11}}{2E} \left((1+v) \left(r + \frac{a^{4}}{r^{3}} \right) r + \frac{2a^{2}}{r}(1-v) \right) \sin(2\theta)$$
(4.22)

For spændingen på den indre rand, r = a, opskrives flytningen i radial og tangentiel retning ved formel (4.23).

$$u_r = \frac{\sigma_{11}a}{E} \left(1 + 2\cos(2\theta) \right)$$

$$u_\theta = -\frac{2\sigma_{11}a}{E} \sin(2\theta)$$
(4.23)

Ved Dilute estimatet regnes hvert enkelt hul omgivet af matrixmaterialet, hvorved der ikke tages hensyn til de øvrige huller. Integration af (4.21) findes for x_1 -retningen ved formel (4.24).

$$\varepsilon_{11}^{c} = \frac{3\sigma_{11}f}{E}$$

$$\varepsilon_{22}^{c} = -\frac{\sigma_{11}f}{E}$$

$$\varepsilon_{12}^{c} = 0$$
(4.24)

Ligeledes beregnes for x_2 -retningen, jf. formel (4.25).

$$\varepsilon_{11}^{c} = -\frac{\sigma_{22}f}{E}$$

$$\varepsilon_{22}^{c} = -\frac{3\sigma_{22}f}{E}$$

$$\varepsilon_{12}^{c} = 0$$
(4.25)

Der indføres et relativt koordinatsystem, roteret 45° i forhold til det oprindelige x₁- x₂-koordinatsystem, hvorved (4.26) fremkommer.

$$\varepsilon_{11}^{c} = 0$$

$$\varepsilon_{22}^{c} =$$

$$\varepsilon_{12}^{c} = \frac{4\sigma_{12}f}{E}$$
(4.26)

Tillægstøjningerne givet ved formel (4.24) til (4.26), er beregnet ved tre forskellige tilstande, hvorved superpositionsprincippet benyttes med formel (4.20), jf. formel (4.27).

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - v\sigma_{22}}{E} + \frac{3\sigma_{11}f}{E} - \frac{\sigma_{22}f}{E}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - v\sigma_{11}}{E} + \frac{3\sigma_{22}f}{E} - \frac{\sigma_{11}f}{E}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + v\sigma_{12}}{E} + \frac{4\sigma_{12}f}{E}$$
(4.27)

Omskrivning af ovenstående giver estimaterne ved formel (4.28) og (4.29).

$$\nu_P = \frac{\nu_M + f}{1 + 3f} \tag{4.28}$$

$$E_p = \frac{E_M}{1+3f} \tag{4.29}$$

hvor

|--|

v_P er Poissons forhold for det porøse materiale

Elasticitetsmodulen opstilles som funktion af porøsiteten ved formel (4.30).

$$\frac{E_P}{E_M} = \frac{1}{1+3f}$$
(4.30)

Elasticitetsmodulen som funktion af porøsiteten er illustreret grafisk på figur 4.3.



Figur 4.3: Relativt elasticitetsmodul for Dilute estimatet.

Det fremgår af figur 4.3, at det relative elasticitetsmodul er 1 ved massivt materiale, hvilket stemmer overens med virkeligheden. Derimod er der stadig stivhed i materialet ved fuld porøsitet, hvilket ikke er muligt, hvorved det kan konkluderes at porøsiteten skal være forholdsvis lille for, at metoden er anvendelig. Dette kan begrundes ved benyttelse af generel flytning af randen, hvor denne teori er udviklet for et kontinuum med stor afstand mellem belastning og hul.

For cirkelskive og cirkelring estimeres Poissons forhold og elasticitetsmodulen ved henholdsvis formel (4.28) og (4.29), hvor resultaterne er angivet i tabel 4.1.

	Porøsitet 0,2	Porøsitet 0,6
Elasticitetsmodul, E_P	49125 MPa	28071 MPa
Poissons forhold, v _P	0,321	0,326

Tabel 4.1: Materialeparametre beregnet ved Dilute estimatet.

4.2 Selvkonsistent estimat

I modsætning til Dilute estimatet beregner det selvkonsistent estimat hvert enkelt hul således, at det omgivende matrixmateriale har egenskaber som det vægtede materiale. Dette bevirker at superponeringen af den generelle løsning omkring hul samt Hookes lov gives ved (4.31).

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - v\sigma_{22}}{E} + \frac{3\sigma_{11}f}{\overline{E}} - \frac{\sigma_{22}f}{\overline{E}}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - v\sigma_{11}}{E} + \frac{3\sigma_{22}f}{\overline{E}} - \frac{\sigma_{11}f}{\overline{E}}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + v\sigma_{12}}{E} + \frac{4\sigma_{12}f}{\overline{E}}$$
(4.31)

Omskrivning af estimaterne kan opstilles ved formel (4.32) og (4.33).

$$v_{P} = v_{M} \left(1 - 3f \right) + f \tag{4.32}$$

$$E_{P} = E_{M}(1 - 3f) \tag{4.33}$$

Ved benyttelse af formel (4.33) findes udtrykket for den relative elasticitetsmodul ved formel (4.34).

$$\frac{E_P}{E_M} = 1 - 3f \tag{4.34}$$

Grafisk er funktionen foreskrevet på figur 4.4.



Figur 4.4: Relativt elasticitetsmodul for den selvkonsistente metode.

For at den selvkonsistente metode er gældende skal porøsiteten ligge i intervallet 0 til 0,33. Ved porøsiteter fra 0,33 til 1 bliver elasticitetsmodulen negativt, hvilket ikke stemmer overens med virkeligheden.

For cirkelskive og cirkelring estimeres Poissons forhold og elasticitetsmodulen ved henholdsvis formel (4.32) og (4.33), hvor resultaterne er angivet i tabel 4.2.

	Porøsitet 0,2	Porøsitet 0,6
Elasticitetsmodul, E_P	31440 MPa	-62880 MPa
Poissons forhold, v _P	0,325	0,350

 Tabel 4.2: Materialeparametre beregnet ved selvkonsistente estimat.

Kapitel 5 Vurdering af analytiske estimater

På baggrund af materialekonstanter for massive elementer, udførtes der i kapitel 2 til kapitel 4, forskellige analytiske estimater for porøse elementer. På baggrund af disse er der i tabel 5.1 opstillet estimaterne for porøsiteten 0,2.

	Elasticitetsmodul	Poissons forhold
	E_s	$\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$
Gibson Ashby	40243 MPa	-
Voigt	62880 MPa	0,313
Reuss	Positivt	-
Dilute	49125 MPa	0,321
Selvkonsistente	31440 MPa	0,325

 Tabel 5.1: Elastiske materialekonstanter for porøst materiale, ved forskellige metoder.

Derudover er der for hvert enkelt estimat optegnet forholdet mellem porøsiteten og det relative elasticitetsmodul, hvilket er vist på figur 5.1



Figur 5.1: Forholdet mellem porøsitet og relativt elasticitetsmodul ved forskellige estimater.

Reuss estimatet forudsætter plan tøjningstilstand, hvilket giver en nedreværdiløsning for estimaterne. Dette bevirker, at estimeringen ved den Selvkonsistente metode ved porøsiteter over 0,33 ikke kan benyttes, hvilket ligeledes stemmer overens med virkeligheden. De resterende estimater overholder Reuss nedreværdi.

For Dilute estimatet og den selvkonsistente metode blev der taget udgangspunkt i et RVE indeholdende periodiske cirkulære huller, hvor der forudsættes plan spændingstilstand. Den selvkonsistente metode medtager interaktionen mellem hullerne, hvilket ikke er tilfældet ved Dilute estimatet. Dilute estimatet forkastes ved porøsiteter over 0,66, da krydsningen med Voigt estimatet foretages ved denne porøsitet. Dette gøres da Voigt estimatet giver en øvreværdiløsning for elasticitetsmodulen, baseret på antagelse om plan tøjningstilstand

Eneste estimat der overalt befinder sig mellem øvre- og nedreværdiløsningen er beregnet med Gibson Ashby metoden, hvor der tages udgangspunkt i en cellemodel, hvor Bernoulli-Euler bjælketeori kan benyttes.

Kapitel 6 Numerisk analyse af enhedscelle

I det følgende afsnit gennemføres en numerisk analyse af enhedscellen til bestemmelse af midlede værdier for elasticitetsmodulen og Poissons forhold, således at den konstitutive matrice [D] kan bestemmes. Analysen udføres ved, at undersøge de midlede spændinger, der fremkommer ved en påført tøjningstilstand. Estimatet sammenlignes herefter med de analytiske beregninger og de udførte forsøg.

6.1 Opbygning af beregningsmodel for enakset tøjning

Elasticitetsmodulen og Poissons forhold for enhedscellen analyseres for en flytningstilstand, der svarer til enakset tøjning, som illustreret på figur 6.1, hvor deformationen af enhedscellen ligeledes er illustreret.



Figur 6.1: Udeformeret og deformeret enhedscelle udsat for enakset tøjning.

Grundet dobbeltsymmetrien af enhedscellen kan denne opdeles i fire ækvivalente dele. Idet enhedscellen opdeles i fire dele og påvirkes af enakset træk, fremkommer en spændingsfordeling, som er principielt illustreret på figur 6.2.



Figur 6.2: Symmetrisk opdeling af enhedscelle med principielle spændinger.

Opdelingen grundet dobbeltsymmetrien af enhedscellen bevirker, at det kun er nødvendigt at regne på en kvart enhedscelle, hvilket reducerer beregningstiden betydeligt. Ved betragtning af spændingsfordelingen på figur 6.2 ses det, at forskydningsspændingerne ophæver hinanden, hvorfor disse ikke medtages i beregningerne. De resterende normalspændinger, der medtages i beregningerne er vist på figur 6.3.



Figur 6.3: Kvart enhedscelle med angivelse af midlede spændinger.

Med udgangspunkt i ovenstående spændingsbetragtning, opstilles beregningsmodellen for enakset tøjning. Modellen opbygges af isoparametriske firkantelementer med otte knuder, der hver har to frihedsgrader. Princippet for opbygningen af den kvarte enhedscelle er illustreret på figur 6.4, hvor modellen er inddelt i 16 elementer. På figuren er de globale knudenumre, elementnumre, understøtningsforhold samt flytningsfelt ligeledes angivet.



Figur 6.4: Principiel opbygning af den kvarte enhedscelle, hvor den stiplede linie viser flytningen af randen.

Opbygningen af modellen er parametriseret, så der kan ændres på radier, $R \ og \ r$, flytningens størrelse, V, samt antallet af elementer. Elementernes udeformerede dimensioner tilpasses således, at alle elementer i en række har samme længde, hvilket skaber en jævn fordeling af elementerne. Det bedste beregningsresultat fremkommer hvis elementerne er tilnærmelsesvis kvadratiske, hvilket ikke altid er tilfældet ved denne opbygning, da modellen er opbygget således, at de ydre dimensioner kan ændres frit. Elementerne bliver som nævnt ikke altid kvadratiske, men ved de dimensioner af enhedsceller der benyttes i dette projekt, anses problemet at være uden betydning. Modellen findes som cd-bilag.

6.2 Bestemmelse af elasticitetsmodulen og Poissons forhold

Til bestemmelse af spændingerne i enhedscellen antages plan spændingstilstand i enhedscellen og formel (6.1) benyttes til bestemmelse af systemets knudekræfter. Udledningen af formel (6.1) kan ses i bilag C.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{R}\} \tag{6.1}$$

hvor

[K] er systemets globale stivhedsmatrice
{V} er systemets knudeflytninger
{R} er knudekræfterne

Ved anvendelse af formel (6.1) bestemmes knudekræfterne langs de to frie rande. Kræfterne summeres til to resulterende kræfter, F_x og F_y , i henholdsvis x- og y-retningen. Spændingerne σ_{xx} og σ_{yy} på de to rande bestemmes med formel (6.2) og (6.3).

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{A_x} \tag{6.2}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F_y}{A_y} \tag{6.3}$$

hvor

 A_x er tværsnitsarealet af den højre rand A_y er tværsnitsarealet af den øverste rand

Elasticitetsmodulen, E, og Poissons forhold, v, bestemmes ved hjælp af Hookes lov for plan spændingstilstand, som vist i formel (6.4).

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{E} \left((1+\nu) \sigma_{\alpha\beta} - \nu \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\gamma} \right)$$
(6.4)

hvor

 $\delta_{\alpha\beta}$ er Kroneckers delta

Elasticitetsmodulen og Poissons forhold analyseres for to enhedsceller med en huldiameter på 8 mm og 14 mm, svarende til en porøsitet på henholdsvis 0,2 og 0,6. Begge enhedsceller er kvadratiske med en bredde på 16 mm. I den følgende gennemgang betragtes enhedscellen med en huldiameter på 8 mm.

Ved at påføre beregningsmodellen en flytning, V, jf. figur 6.4, bestemmes normaltøjningen, ε_{xx} , ved formel (6.5).

$$\mathcal{E}_{xx} = \frac{V}{R} \tag{6.5}$$

Ved anvendelse af 6400 elementer og en flytning på 1 fremkommer følgende resultater.

$$\varepsilon_{xx} = 0,125$$

 $\varepsilon_{yy} = 0$
 $\sigma_{xx} = 6596,1$ MPa
 $\sigma_{yy} = 1802,9$ MPa

Ved benyttelse af resultaterne samt formel (6.4), opstilles to ligninger med to ubekendte og elasticitetsmodulen og Poissons forhold bestemmes.

$$0,125 = \frac{1}{E} ((1+\nu)6596, 1-\nu(6596, 1+1802, 9)) \\ 0 = \frac{1}{E} ((1+\nu)1802, 9-\nu(6596, 1+1802, 9)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 48013 \text{ MPa} \\ \nu = 0,342 \end{cases}$$

Beregningerne er for begge enhedsceller foretaget med forskellige inddelinger af elementerne, hvorefter der er foretaget konvergensstudier af beregningsresultaterne. Resultater samt konvergensstudier er nærmere beskrevet i afsnit 6.5.

6.3 Opbygning af model for ren forskydning

Forskydningsmodulen for enhedscellen bestemmes ved at analysere en tøjningstilstand, der svarer til ren forskydning, som illustreret på figur 6.5, hvor deformationen af enhedscellen ligeledes er illustreret.



Figur 6.5: Udeformeret og deformeret enhedscelle udsat for ren forskydning.

Grundet dobbeltsymmetrien af enhedscellen kan den opdeles i fire ækvivalente dele. Idet enhedscellen opdeles i fire dele og påvirkes af ren forskydning, fremkommer en spændingsfordeling som er principielt illustreret på figur 6.6.



Figur 6.6: Symmetrisk opdeling af enhedscelle med principielle spændinger.

Opdelingen af enhedscellen bevirker, som ved enakset tøjning, at det kun er nødvendigt at regne på en kvart enhedscelle, hvilket reducerer beregningstiden betydeligt. Ved betragtning af spændingsfordelingen på figur 6.6 ses det, at normalspændingerne ophæver hinanden, hvorfor disse ikke medtages i beregningerne. De resterende forskydningsspændinger, der medtages i beregningerne er vist på figur 6.7.



Figur 6.7: Kvart enhedscelle med angivelse af spændinger.

Ved opstillingen af beregningsmodellen er enhedscellen grundet programmeringsmæssige årsager roteret 45° i forhold til det ovenstående. Beregningsmodellen for ren forskydning er opbygget af isoparametriske firkantelementer med otte knuder, der hver har to frihedsgrader. Princippet for opbygningen af den kvarte enhedscelle er illustreret på figur 6.8, hvor modellen er inddelt i 16 elementer. På figuren er de globale knudenumre, elementnumre, understøtningsforhold samt flytningsfelt ligeledes angivet.



Figur 6.8: Principiel opbygning af den kvarte enhedscelle, hvor den stiplede linie viser flytningen af randen.

Opbygningen af modellen er ligesom ved enakset træk parametriseret, så der kan ændres på radier, $R \ og \ r$, flytningens størrelse, V, samt antallet af elementer. Ved denne model gælder samme betragtninger om aflange elementer samt bestemmelse af spændinger, som ved modellen for enakset træk. Modellen findes som cd-bilag.

6.4 Bestemmelse af forskydningsmodulen

Ved bestemmelsen af enhedscellens forskydningsmodul, G, antages ligeledes plan spændingstilstand i enhedscellen, og formel (6.1) benyttes til at bestemme systemets knudekræfter.

Ved anvendelse af formel (6.1) bestemmes og summeres reaktionerne, F_{xy} , i knuderne langs den frie rand. I beregningsmodellen bestemmes reaktionerne i x- og y-retning, hvorfor disse projeceres ind på randen. Spændingen σ_{xy} vinkelret på den frie rand bestemmes med formel (6.6).

$$\sigma_{xy} = \frac{F_{xy}}{A_{xy}} \tag{6.6}$$

hvor

 A_{xy} er tværsnitsarealet af den frie rand

Med kendte spændinger på den frie rand bestemmes forskydningsmodulen, G, for enhedscellen ved formel (6.7).

$$G = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} \tag{6.7}$$

hvor

 γ_{xy} er forskydningstøjningen

Forskydningsmodulen analyseres for de samme to enhedsceller, som ved bestemmelsen af elasticitetsmodulen og Poissons forhold. I den følgende gennemgang betragtes enhedscellen med en huldiameter på 8 mm.

Ved at påføre beregningsmodellen en flytning, V, jf. figur 6.8, bestemmes forskydningstøjningen, γ_{xy} , ved formel (6.8).

$$\gamma_{xy} = 2 \cdot tan\left(\frac{V}{R}\right) \tag{6.8}$$

Ved anvendelse af 14400 elementer og en flytning på 1 fremkommer følgende resultater.

$$\gamma_{xy} = 0.2513$$

 $\sigma_{xy} = 6430.77 \text{ MPa}$

Med resultaterne, samt formel (6.7), bestemmes forskydningsmodulen for enhedscellen.

$$G = \frac{6430,77}{0,2513} = 25590 \text{ MPa}$$

Benyttes formel (6.4) til bestemmelse af forskydningsmodulen bliver resultatet 17875 MPa, hvilket afviger fra den numeriske model. Resultatet fra den numeriske model anses for værende mest korrekt, idet den normale teori ikke tager hensyn til huller i materialet.

Beregningerne er for begge enhedsceller foretaget med forskellige inddelinger af elementerne, hvorefter der er foretaget konvergensstudier af beregningsresultaterne. Resultater samt konvergensstudier er nærmere beskrevet i afsnit 6.5.

6.5 Konvergensstudie

I dette afsnit foretages et konvergensstudie på elasticitetsmodulen og Poissons forhold for enhedscellerne. Dette gøres ved at estimere eksakte værdier af disse størrelser ud fra værdier fra tre forskellige mesh. Som kilde er [Cook, 2002] anvendt.

Generelt betegnes den betragtede feltstørrelse, Φ , hvor den relative fejl på feltstørrelsen antages at kunne udtrykkes som formel (6.9).

$$e_i = c h_i^{q} = \frac{\Phi_i - \Phi_{\infty}}{\Phi_{\infty}}$$
(6.9)

hvor

С	er en problemkonstant
h	er en karakteristisk elementlængde
q	er konvergensraten
Φ	er feltstørrelsen beregnet i modellen
$arPhi_\infty$	er den konvergerede værdi af feltstørrelsen

Beregnes feltstørrelsen for tre forskellige inddelinger, kan de tre ubekendte, c, q og Φ_{∞} , i (6.9) bestemmes. Idet c og q er konstante for forskellige elementinddelinger, kan c elimineres.

$$c = \frac{\Phi_1 - \Phi_\infty}{\Phi_\infty h_1^q} = \frac{\Phi_2 - \Phi_\infty}{\Phi_\infty h_2^q}$$
(6.10)

Ved isolation af Φ_{∞} i formel (6.10) fås (6.11).

$$\Phi_{\infty} = \frac{\Phi_1 h_2^{q} - \Phi_2 h_1^{q}}{h_2^{q} - h_1^{q}} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 (h_1 / h_2)^{q}}{1 - (h_1 / h_2)^{q}}$$
(6.11)

Idet den konvergerede værdi ønskes konstant, og ved at kræve samme forhold mellem elementlængderne, h, i de forskellige inddelinger, kan konvergensraten findes ved (6.12).

$$q = \frac{\ln\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_3}\right)}{\ln(m)} \tag{6.12}$$

hvor

m er forholdet mellem elementlængderne, jf. formel (6.13)

$$m h_1 = h_2 = \frac{1}{m} h_3 \tag{6.13}$$

Den teoretiske værdi af konvergensraten forventes at have værdien af ordenen på fejlen på den betragtede feltstørrelse. Fejlen på feltstørrelsen antages en højere en ordenen på selve feltstørrelsen. Hvis eksempelvis feltstørrelsen er en flytning af første orden, vil fejlen være af anden orden og den teoretiske konvergensrate er derfor to.

Når konvergensraten er bestemt kan den eksakte værdi estimeres ved (6.11).

6.5.1 Konvergens af enhedscelle med porøsitet 0,2

Beregningsresultaterne der anvendes til bestemmelsen af elasticitetsmodulen og Poissons forhold for enhedscellen med porøsitet 0,2, er opstillet i tabel 6.1, hvor tidsforbruget samt elementlængden ligeledes er angivet. Øvrige beregningsresultater findes som cd-bilag.

Antal	Antal	Elementlængde,	Elasticitetsmodul,	Poissons	Beregningstid
elemente	er frihedsgrader	h	h E [MPa]		[s]
40	00 2602	0,100	48013,15	0, 34154	3
160	00 10002	0,050	48013,18	0, 34161	34
640	00 39202	0,025	48013,49	0, 34163	615

Tabel 6.1: Beregningsresultater for enhedscellen med porøsitet 0,2.

For enhedscellen med en porøsitet på 0,2 anvendes elementlængden, h, jf. formel (6.14).

$$h = \frac{R - r}{4N_{bred}} \tag{6.14}$$

hvor

R	er ydre radius i cirkelskiven
r	er indre radius i cirkelskiven
N _{bred}	er antallet af elementer i bredden

Der vælges et forhold mellem elementlængderne i de forskellige modeller på m lig 2, som opnås ved at fordoble antallet af elementer i bredden ved en ny inddeling.

Elasticitetsmodul

Til bestemmelse af konvergensraten og estimering af den eksakte værdi benyttes resultaterne i tabel 6.1. Herved bestemmes konvergensraten for elasticitetsmodulen med formel (6.12).

$$q_E = \frac{\ln\left(\frac{48013,15 - 48013,18}{48013,18 - 48013,49}\right)}{\ln(2)} = -3,29$$

Det ses at konvergensraten er negativ, hvilket betyder at modellen giver dårligere resultater jo flere elementer der benyttes. Dette strider imod det forventede og kan umiddelbart forklares ved, at nogle elementer i modellen bliver meget aflange ved mange elementer.

Herefter estimeres den eksakte værdi af elasticitetsmodulen med formel (6.11).

$$E_{\infty} = \frac{48013, 18 - 48013, 49(2)^{-3,29}}{1 - (2)^{-3,29}} = 48013 \text{ MPa}$$

På figur 6.9 er den konvergerede værdi af elasticitetsmodulen plottet sammen med beregningsresultater for forskellige inddelinger af enhedscellen. Det fremgår af figuren, at elasticitetsmodulen ikke konvergerer mod den eksakte værdi ved flere elementer, svarende til en finere inddeling. Problemet kan eksempelvis skyldes numeriske fejl, som opstår ved aflange elementer.



Figur 6.9: Konvergens for elasticitetsmodulen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.

På figur 6.10 er den relative fejl på elasticitetsmodulen illustreret. Det ses, at de aktuelle fejl ikke følger den forventede fejl, hvilket stemmer overens med den manglende konvergens. Det fremgår ligeledes af figuren, at fejlen er af størrelsesordenen 10^{-6} ved 1000 elementer, hvilket antyder, at det ikke er nødvendigt, at lave en meget fin inddeling, idet beregningstiden øges kraftigt ved flere elementer, jf. tabel 6.1.



Figur 6.10: Relativ fejl på elasticitetsmodulen. Linien angiver den forventede fejl efter formel (6.9).

Poissons forhold

For Poissons forhold bestemmes på tilsvarende vis konvergensrate estimatet af den eksakte værdi.

$$q_{\nu} = \frac{\ln\left(\frac{0,34154 - 0,34161}{0,34161 - 0,34163}\right)}{\ln(2)} = 1,75$$
$$\nu_{\infty} = \frac{0,34161 - 0,34163(2)^{1,75}}{1 - (2)^{1,75}} = 0,343$$

Poissons forhold er illustreret på figur 6.11, hvor det ses, at resultatet konvergerer mod den eksakte værdi ved cirka 1000 elementer.



Figur 6.11: Konvergens for Poissons forhold. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.

Den relative fejl på Poissons forhold er vist på figur 6.12, hvor de aktuelle fejl er lidt højere end de forventede. Fejlen er af størrelsesordenen 10^{-4} for 1000 elementer, hvorfor der ikke er behov for en finere inddeling til bestemmelsen af Poissons forhold.



Figur 6.12: Relativ fejl på Poissons forhold. Linien angiver den forventede fejl efter formel (6.9).

Forskydningsmodul

Beregningsresultaterne der anvendes til bestemmelsen af forskydningsmodulen for enhedscellen med porøsitet 0,2, er opstillet i tabel 6.2, hvor tidsforbruget samt elementlængden ligeledes er angivet.

	Antal	Antal	Elementlængde,	Forskydningsmodul,	Beregningstid
_	elementer	frihedsgrader	h G [MPa]		[s]
	900	5702	0,067	25507,90	12
	3600	22202	0,033	25562,96	185
	14400	87602	0,017	25589,97	3409

Tabel 6.2: Beregningsresultater for enhedscellen med porøsitet 0,2.

Konvergensraten og den eksakte værdi af forskydningsmodulen estimeres tilsvarende.

$$q_{G} = \frac{\ln\left(\frac{25507,90 - 25562,96}{25562,96 - 25589,97}\right)}{\ln(2)} = 1,03$$
$$G_{\infty} = \frac{25562,96 - 25589,97(2)^{1,03}}{1 - (2)^{1,03}} = 25616 \text{ MPa}$$

Figur 6.13 illustrerer konvergensen af forskydningsmodulen. Det fremgår af grafen, at forskydningsmodulen konvergerer langsomt i forhold til elasticitetsmodulen og Poissons forhold.



Figur 6.13: Konvergens for forskydningsmodulen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.

Fejlen på forskydningsmodulen er optegnet på figur 6.14, hvor det ses at de aktuelle fejl stemmer overens med de forventede. Fejlen på forskydningsmodulen er større end fejlen på elasticitetsmodulen og Poissons forhold, hvilket stemmer overens med konvergensen vist på figur 6.13. Ved 15000 elementer er fejlen af størrelsesordenen 10⁻³, hvorfor det derfor nødvendigt med en fin inddeling, hvis der skal fremkomme acceptable beregningsresultater.



Figur 6.14: Relativ fejl på forskydningsmodulen. Linien angiver den forventede fejl efter formel (6.9).

6.5.2 Konvergens af enhedscelle med porøsitet 0,6

Konvergensstudier for enhedscellen med porøsitet 0,6 foretages analogt til afsnit 6.5.1 og er vedlagt som cd-bilag.

Kapitel 7 Forsøgsresultater for enhedscelle

Til sammenligning af de analytiske og numeriske beregninger er eksperimentelle forsøg udført på to enhedsblokke, hvilke er vist på figur 7.1.



Figur 7.1: Enhedsblokke til bestemmelse af verificering af elasticitetsmodulen.

Forsøgselementerne er udformet med dimensionerne $64 \times 64 \times 20$ mm med borede huller med diameter 8 og 14 mm, hvorved porøsiteten bliver henholdsvis 0,20 og 0,60. Forsøgene er udført på en sådan måde at det ikke er muligt at bestemme Poissons forhold. For forsøgsbeskrivelse og usikkerheder ved forsøgene henvises til forsøg 2, hvorfor der i følgende udelukkende er angivet resultaterne af disse. For forsøgselementet med porøsitet 0,2 er resultaterne angivet i tabel 7.1.

	Porøsitet 0,2
Elasticitetsmodul, E	44500 MPa
Signifikansniveau, α	0,05
Konfidensinterval	44006 MPa $\leq E \leq$ 45005 MPa
Systematisk fejl, f	$1,115 \cdot 10^{-6}$
Konfidensinterval	$1,11 \cdot 10^{-6} \le f \le 1,12 \cdot 10^{-6}$
Målinger	276
R^2	1,0

Tabel 7.1: Resultater for prøveelement med porøsitet 0,20.

т	· 1 1	14 4	C	C	. 1		\wedge	• •	. 1 1	
L	10010000 er	recultaterne	tor	torgag	men	noraciteten	116	anoiver	1 T2 Del	
L	Jiguiduds di	resultaterne	101	101308	mou		0.0	angiver	1 tabbi	· /
	<i>L</i>)							2		

Porøsitet 0,6
15247 MPa
0,05
$15122 \text{ MPa} \le E \le 15375 \text{ MPa}$
$1,73 \cdot 10^{-6}$
$1,65 \cdot 10^{-6} \le f \le 1,80 \cdot 10^{-6}$
352
0,99



Kapitel 8 Vurdering af materialekonstanter

I det følgende sammenholdes de analytiske, numeriske og eksperimentelt bestemte materialekonstanter for porøsiteten 0,2. På baggrund af denne sammenligning vurderes det hvilke materialekonstanter der skal anvendes til beregninger af de porøse prøveelementer.

Materialekonstanterne for det massive materiale er bestemt i forsøg 1, hvor resultaterne forekommer som angivet i tabel 8.1.

	Elasticitetsmodul	Poissons forhold
	E_M	v_M
Massivt prøveelement	78600 MPa	0,313

Tabel 8.1: Elastiske materiale konstanter for massive emner.

I de foregående kapitler er elasticitetsmodulen beregnet ved forskellige analytiske og numeriske metoder, hvor resultaterne af disse er angivet i tabel 8.2, for porøsiteten 0,2.

	Elasticitetsmodul	Poissons forhold
	E_P	v_P
Gibson Ashby	40243 MPa	-
Voigt	62880 MPa	0,313
Reuss	Positivt	-
Dilute	49125 MPa	0,321
Selvkonsistente	31440 MPa	0,325
Numerisk	48600 MPa	0,343
Eksperimentelt	45000 MPa	-

 Tabel 8.2: Resultater for estimater af elasticitetsmodulen.

Ved bestemmelse af Poissons forhold er det ikke muligt at beregne denne ud fra eksperimentelle resultater, hvorved det ikke er muligt at sammenholde de analytiske og numeriske resulter. Grafisk er estimaterne for det relative elasticitetsmodul givet i figur 8.1, hvor det relative elasticitetsmodul er sat op i forhold til porøsiteten.



Figur 8.1: Grafisk fremstilling af beregning af elasticitetsmodulen.

Af figur 8.1 fremgår det, at ingen af de beregnede estimater stemmer helt overens med de eksperimentelle resultater. De analytiske estimater Voigt og Reuss anviser henholdsvis øvre- og nedreværdiløsninger, hvoraf det kan bemærkes af de numeriske beregnede materiale konstanter ligger inden for disse. Den selvkonstitutive metode anses for ikke at være anvendelig i denne sammenhæng, da disse resultater ligger forholdsvis langt væk fra de eksperimentelle og numeriske resultater. Yderligere kan denne metode ikke anvendes ved porøsiteter over 0,33. Ved lave porøsiteter findes en forholdsvis god sammenhæng mellem Gibson Ashby, Dilute, numeriske og eksperimentelle resultater, men sammenhængen bliver dårligere ved stigende porøsitet. På baggrund af dette kan det ikke vurderes om det er Gibson Ashby eller Dilute der giver det bedste estimat. Gibson Ashby den simpleste analytiske metode, men giver intet estimat på Poissons forhold, hvorfor denne metode ikke kan benyttes. De numeriske beregninger giver et bedre bud på materialekonstanterne end dilute, hvorfor resultaterne fra de numeriske resultater benyttes til beregning af de porøse prøveelementer. Ydermere er det ikke muligt at sammenligne Poissons forhold med eksperimentelle resultater, hvorfor de numeriske materialekonstanter anses at give det mest korrekte resultat.

Til beregning af spændinger og flytninger for de massive og porøse aluminiumsskiver, anvendes materialeegenskaberne angivet i tabel 8.3.

	Massive elementer	Porøse elementer
Elasticitetsmodul, E	78600 MPa	48000 MPa
Poissons forhold, v	0,313	0,343
Forskydningsmodul, G	29930 MPa	25600 MPa

Tabel 8.3: Elastiske konstanter for cirkelring.

Ved de numeriske beregninger af de porøse aluminiumsskiver anvendes følgende fleksibilitetsmatrice, $[C_{0,2}]$.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\theta},2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{48000 \text{ MPa}} & \frac{-0,343}{48000 \text{ MPa}} & 0\\ \frac{-0,343}{48000 \text{ MPa}} & \frac{1}{48000 \text{ MPa}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{25600 \text{ MPa}} \end{bmatrix}$$

Del III Cirkelskive

Delindledning

I de følgende kapitler benyttes de, i del II, beregnede materialeparametre til analyse af henholdsvis massiv og porøs cirkelskive, ved anvendelse af forskellige analytiske og numeriske metoder. Den porøse cirkelskive antages udført i et homogent, isotropt, lineærelastisk materiale, hvorved den eneste forskel mellem beregninger af massiv og porøs cirkelskive bliver materialeparametrene.

Cirkelskiven beregnes analytisk ved at benytte kompleks funktionsteori, Ritz metoden og Fourier-rækker. Ved benyttelse af kompleks funktionsteori og Fourier-rækker fremkommer et spændingsbillede over cirkelskiven, hvorved disse kan vurderes i forhold til hinanden. Ritz metoden giver flytningerne på skiven, samt den potentielle energi.

Numerisk anvendes elementmetoden ved benyttelse af forskellige typer elementer, hvorved disse kan sammenholdes i forhold til spænding, flytning og potentiel energi. Til hver enkelt elementtype udføres konvergensstudier, hvorved den relative fejl kan vurderes i forhold til antallet af elementer og tidsforbrug.

Til verificering af de analytiske og numerisk beregninger udføres forsøg, hvorved det vurderes hvilken metode, der giver det mest præcise bud på henholdsvis spændinger og flytninger.

Kapitel 9 Kompleks funktionsteori

I dette kapitel opstilles et analytisk udtryk for cirkelskiven. Udtrykket opstilles ved hjælp af kompleks funktionsteori for isotrope og lineærelastiske materialer, hvor der antages plan tøjningstilstand. Udledningerne af ligningerne er udenfor pensum på 7. semester og derfor er det følgende en anvendelse af ligningerne uden udledning. Resultaterne er spændinger, der skal anvendes til sammenligning med de øvrige modeller i rapporten. I det følgende afsnit er kilden [Thoft-Christensen, 1973].

9.1 Den biharmoniske ligning

Den biharmoniske ligning, (9.1) sammenholder relationerne mellem spændinger og tøjninger for en plan tøjningstilstand, hvori kompatibilitetsbetingelsen er overholdt.

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0$$
(9.1)

hvor

U er Airy's Spændingsfunktion ved:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$
$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Løsningen til den biharmoniske ligning er givet ved de komplekse funktioner f og g i formel (9.2), der er spændingsfunktionen for et defineret område.

$$U(z) = \frac{1}{2} \left(\underline{z} \cdot f(z) + z \cdot \underline{f(z)} + g(z) + \underline{g(z)} \right)$$
(9.2)

hvor

Z	er punktet spændingerne beregnes i
f(z)	er en funktion, der bestemmes på baggrund af last og geometri
g(z)	er en funktion, der bestemmes på baggrund af last og geometri
<u>f(z)</u>	er den kompleks konjugerede til $f(z)$
<u>g(z)</u>	er den kompleks konjugerede til $g(z)$

9.2 Belastning på cirkelskiven

I forsøgene er cirkelskiven belastet med en linielast fordelt over et lille område. I det følgende påføres lasten som en punktlast, jf. figur 9.1.



Figur 9.1: Kraften P's placering på cirkelskiven i forhold til vinklen a.

Kraftens placering er givet ved formel (9.3), hvor α sættes til $\pi/2$.

$$z_0 = R \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \land \quad z_0 = R \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \tag{9.3}$$

Kraften er i dette udtryk en enkeltkraft, og derfor optræder der lokalt meget større spændinger end ved en kraft fordelt over et område. Derfor skal beregnede spændinger ved kraftens angrebspunkt tages med forbehold.

Spændingerne beregnes i et punkt givet ved formel (9.4) og funktionerne f(z) og g(z), der skal anvendes til bestemmelse af spændingstilstanden er givet ved formel (9.5).

$$z = R \cdot \xi \cdot e^{i\theta} \tag{9.4}$$

hvor

 ξ er et tal mellem 0 og 1

 θ er vinklen til punktet i forhold til x-aksen
$$f(z) = \frac{iP}{2\pi} \left(ln \left(\frac{z_0 - z}{\underline{z_0} - z} \right) - \frac{z_0 - \underline{z_0}}{2R^2} z \right)$$

$$g'(z) = \frac{iP}{2\pi} \left(ln \left(\frac{z_0 - z}{\underline{z_0} - z} \right) + \frac{\underline{z_0}}{z_0 - z} - \frac{z_0}{\underline{z_0} - z} \right)$$
(9.5)

Disse ligninger anvendes til at bestemmes spændingerne i skiven.

9.3 Bestemmelse af spændingstilstanden

Ud fra den biharmoniske ligning (9.1) og løsningen til denne (9.2), kan (9.6) og (9.7) opstilles.

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\left(f'(z) + \underline{f'(z)}\right)$$
(9.6)

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} - i2\sigma_{xy} = 2(\underline{z}f''(z) + g''(z))$$
(9.7)

Fortegnsretninger for (9.6) og (9.7) er skitseret for cirkelskiven på figur 9.2.



Figur 9.2: Fortegnsretning for spændinger.

Den komplekse del udgår af formel (9.6), idet det komplekse tal f'(z) adderes med den konjugerede. Forskydningsspændingerne beregnes af den imaginære del af (9.7) mens den reelle del af (9.6) og (9.7) anvendes til bestemmelse af normalspændingerne.

Løsningen til formel (9.6) og (9.7) er angivet i formel (9.8), (9.9) og (9.10).

$$\sigma_{xx}t = \frac{P \cdot \left(\xi^4 - 1\right)}{A} - \frac{D}{C}$$
(9.8)

$$\sigma_{yy}t = \frac{P \cdot \left(\xi^4 - 1\right)}{A} + \frac{D}{C}$$
(9.9)

$$\sigma_{xy}t = \frac{B}{C} \tag{9.10}$$

hvor

t

er tykkelsen af cirkelskiven

$$\begin{split} A &= \pi \cdot R \cdot \left(4 \cdot \xi^2 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 + 1 - 2 \cdot \xi^2 + \xi^4 \right) \\ B &= 16 \cdot \left(-\xi^4 + 2 \cdot \xi^4 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 + 2 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi^2 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 - 1 \right) \cdot \sin\left(\theta\right) \cdot P \cdot \cos\left(\theta\right) \cdot \xi^2 \\ C &= \pi \cdot R \cdot \left(\begin{array}{c} 1 + \xi^8 - 4 \cdot \xi^6 + 8 \cdot \xi^6 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 + 8 \cdot \xi^2 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 \\ -4 \cdot \xi^2 + 6 \cdot \xi^4 - 16 \cdot \xi^4 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 + 16 \cdot \xi^4 \cdot \cos\left(\theta\right)^4 \end{array} \right) \\ D &= 2 \cdot \left(\begin{array}{c} 8 \cdot \xi^6 \cdot \cos\left(\theta\right)^4 - 8 \cdot \xi^6 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 + \xi^6 - 8 \cdot \xi^4 \cdot \cos\left(\theta\right)^4 \\ + 12 \cdot \xi^4 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 - 3 \cdot \xi^4 - 4 \cdot \xi^2 \cdot \cos\left(\theta\right)^2 + 3 \cdot \xi^2 - 1 \end{array} \right) \cdot P \end{split}$$

For enhver vinkel og radius kan spændingerne nu beregnes. Til et senere sammenligningsgrundlag indsættes kraften 30 kN og på figur 9.3 og figur 9.4 er normalspændingerne optegnet, med de på figur 9.2 viste fortegnsretninger.



Figur 9.3: Normalspændinger i x-retning.



Til kontrol af de analytiske udtryk kan de polære spændinger anvendes. På den ydre rand er både $\sigma_{r\theta}$ og σ_{rr} lig 0 på nær i lastens angrebspunkt. Retningerne for de polære spændinger er defineret på figur 9.5. De polære spændinger $\sigma_{r\theta}$ og σ_{rr} er vist på henholdsvis figur 9.5 og figur 9.6.



Figur 9.5: *Polære forskydningsspændinger* $\sigma_{r\theta}$.



Figur 9.6: Polære normalspændinger i radiær retning.

Spændingerne er 0 på hele randen på nær punktet, hvor lasten rammer cirkelskiven, jf. figur 9.5 og figur 9.6. Endvidere er σ_{rr} for vinklen 0 ens med σ_{xx} og for vinklen $\pi/2$ er σ_{rr} ens med σ_{yy} . Herved kan det konstateres, at spændingsfelterne er korrekte og de kan anvendes til sammenligning med FEM beregninger og forsøg.

Til sammenligning med de øvrige modeller bestemmes værdien af normal og forskydningsspændingerne i tre punkter. Placeringen af punkterne er vist på figur 9.7.



Figur 9.7: Placering af sammenligningspunkter.

Til sammenligningen sættes lasten til 30 kN. og værdierne af spændingerne er angivet i tabel 9.1.

Punkt	σ_{xx}	$\sigma_{_{VV}}$	σ_{xy}
1	-0,7	-6,4	3,7
2	6,0	-18,1	0,0
3	6,0	-26,1	0,0

 Tabel 9.1: Spændingen i MPa for en last på 30 kN.

Kapitel 10 Fourier-rækker

I det følgende afsnit benyttes en Fourier-udvikling af Airy's spændingsfunktion til en analytisk beregning af spændinger i en cirkelskive belastet af to punktlaster. Udledningerne af ligningerne er udenfor pensum på 7. semester, hvorfor baggrunden for beregningerne ikke gennemgås. Afsnittet er skrevet i henhold til [Kohl, 1930].

10.1 Spændingsberegning ved Fourier-rækker

Spændingstilstanden i en cirkelskive kan beskrives ved en Fourier-udvikling af Airy's spændingsfunktion (10.1) gældende for en vilkårlig ligevægtsbetingelse.

$$F = b_0 r^2 + b_1 r^3 \cos(\theta) + d_1 r^3 \sin(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2}) \cos(n\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n r^n + d_n r^{n+2}) \sin(n\theta)$$
(10.1)

hvor

θ og r	er polære koordinater til et vilkårligt punkt i skiven, $0 \le r \le 1$
<i>a, b, c</i> og <i>d</i>	er konstanter der defineres ud fra randbetingelser
n	er et helt tal der antager værdier fra 2 til ∞

Normalspændingen i henholdsvis radiær og tangentiel retning bestemmes ved fomel (10.2) og (10.3).

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^{2}} \frac{\partial^{2} F}{\partial \theta^{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$= 2b_{0} + 2b_{1}r\cos(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(1-n)a_{n}r^{n-2} + (n+2-n^{2})b_{n}r^{n} \right] \cos(n\theta) \quad (10.2)$$

$$+ 2d_{1}r\sin(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(1-n)c_{n}r^{n-2} + (n+2-n^{2})d_{n}r^{n} \right] \sin(n\theta)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^{2} F}{\partial r^{2}}$$

$$= 2b_{0} + 6b_{1}r\cos(\theta) + \sum_{2}^{\infty} \left[n(n-1)a_{n}r^{n-2} + (n+2)(n+1)b_{n}r^{n} \right] \cos(n\theta) \quad (10.3)$$

$$+ 6d_{1}r\sin(\theta) + \sum_{2}^{\infty} \left[n(n-1)c_{n}r^{n-2} + (n+2)(n+1)d_{n}r^{n} \right] \sin(n\theta)$$

Forskydningsspændingen i polære koordinater bestemmes ved (10.4).

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)$$

= $2b_1 r \sin(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)a_n r^{n-2} + n(n+1)b_n r^n \right] \sin(n\theta)$ (10.4)
 $-2d_1 r \cos(\theta) - \sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)c_n r^{n-2} + n(n+1)d_n r^n \right] \sin(n\theta)$

Metoden hvorpå spændingerne bestemmes gør sig gældende for en cirkelskive belastet af to punktlaster i det vandrette felt, jf. figur 10.1.



Figur 10.1: Venstre figur viser en cirkelskive belastet af to ens punktlaster symmetrisk placeret og figuren til højre viser punktlasterne virkende som spændinger.

Kræfterne der belaster cirkelskiven kan betragtes som en spænding virkende over et areal, således kraften skrives ved formel (10.5).

$$P = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon} \tag{10.5}$$

Belastningen på randen i radiær og tangentiel retning udvikles med en Fourierrække givet ved formel (10.6) og (10.7).

$$\sigma_0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\theta\right) \tag{10.6}$$

$$\tau_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n\theta\right) \tag{10.7}$$

hvor

 A_0, A_n og B_n er konstanter der afhænger af randbetingelser

Konstanterne A_n og B_n bestemmes ved formel (10.8) og (10.9)

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sigma_R \cos(n\theta) d\theta \tag{10.8}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_R \sin(n\theta) d\theta \tag{10.9}$$

Antages ε at gå mod nul og forudsættes randbetingelser i formel (10.10) for spændingen på randen, kan alle konstanter bestemmes.

$$\sigma_{0} = \frac{P}{2\varepsilon}, \quad \tau_{0} = 0 \quad \text{for} \quad 0 < \theta < \varepsilon \quad \text{og} \quad \pi - \varepsilon < \theta < \pi$$

$$\sigma_{0} = 0, \quad \tau_{0} = 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$$

(10.10)

Spændingerne beregnes ved formel (10.11), (10.12) og (10.13). Der henvises til [Kohl, 1930] for gennemgang af beregninger.

$$\sigma_{rr} = \frac{2P}{\pi Rt} \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{2\nu-2} \left[\nu - (\nu - 1)r^2 \right] \cos(2\nu\theta) \right]$$
(10.11)

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2P}{\pi Rt} \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{2\nu-2} \left[-\nu + (\nu+1)r^2 \right] \cos(2\nu\theta) \right]$$
(10.12)

$$\sigma_{r\theta} = \frac{2P}{\pi Rt} \sum_{\nu=1}^{\infty} r^{2\nu-2} \left[-\nu + \nu r^2 \right] sin(2\nu\theta)$$
(10.13)

 ∞

hvor

R	er den reelle radius af cirkelskiven
t	er skivens tykkelse
v	er en variabel der antager en værdi fra 1 til

For at sammenligne med andre analytiske, numeriske og målte værdier omregnes de polære spændinger til kartesiske spændinger. Dette gøres ved formel (10.14), (10.15) og (10.16) [Foley, 2004].

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \cos(2\theta) - \sigma_{r\theta} \sin(2\theta)$$
(10.14)

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{r\theta} \sin(2\theta)$$
(10.15)

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \sin(2\theta) + \sigma_{r\theta} \cos(2\theta)$$
(10.16)

Til spændingsberegning benyttes en kraft på -30 kN og en radius på 79 mm.

På figur 10.2 er spændingsfordelingen σ_{xx} , σ_{yy} og σ_{xy} plottet for den kvarte cirkelskive for lasten angribende vertikalt.



Figur 10.2: Spændingsfordeling σ_{xx} , σ_{yy} og σ_{xy} for 500 led i rækkerne.

Af figur 10.2 fremgår, at spændingen er nul på randen undtagen der hvor lasten påføres, hvilket stemmer overens med det forventede.

Spændingerne beregnet ved kontrolpunkterne ses i tabel 10.1.

Punkt	σ_{xx}	$\sigma_{_{VV}}$	σ_{xy}
1	-0,8	-6,4	3,8
2	6,0	-18,1	0,0
3	6,0	-26,2	0,0

 Tabel 10.1: Spændingen i MPa for en last på 30 kN.

Herudover kan spændingsvariationen sammenlignes med spændingsvariationen bestemt i kapitel 9, hvor der er der god overensstemmelse, jf. figur 10.3.



Figur 10.3: Spændingsvariationen i y-retningen beregnet ved kompleksfunktionsteori og Fourier-rækker.

På baggrund af spændingsvariationerne i figur 10.3 konkluderes at metoderne for kompleksfunktionsteori om Fourier-rækker stemmer overens. Derfor vurderes spændingsfelterne at være korrekte og kan benyttes til sammenligning med FEM-beregninger.

Kapitel 11 Ritz metoden for massiv cirkelskive

I det følgende benyttes Ritz metoden, der er en analytisk metode, til bestemmelse af et tilnærmet flytningsfelt for cirkelskiven. Ritz metoden benytter potentielenergi ved anvendelse af flytningsfelter, der er givet ved ét analytisk udtryk for hele randen af legemet. Der gættes på forskellige flytningsfelter, og det bedste gæt er gættet med den mindste potentielle energi.

11.1 Generel fremgang for Ritz metoden

I det følgende betragtes kun den kvarte cirkelskive, hvorved de kinematiske krav til problemstillingen er givet ved, at cirkelskiven skal hænge sammen over akserne. Kravet svarer til det statiske system, der er skitseret på figur 11.1. Problemet kunne ligeledes opskrives for den halve eller hele cirkelskiven, hvilket giver de samme løsninger.



Figur 11.1: Statisk system for den kvarte cirkelskive.

Den potentielle energi er givet ved formel (11.1), hvor der er set bort fra massekræfter.

$$\Pi_{P}(u) = \frac{1}{2} \int_{V} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{T} [\boldsymbol{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dV - \frac{1}{2} P \cdot u_{y}(0, R)$$
(11.1)

hvor

 $\begin{bmatrix} D \end{bmatrix}$ er det konstitutive forhold { ε } er tøjningerne *P* er belastningen $u_y(0,R)$ er flytningen i kraftens angrebspunkt

Det konstitutive forhold er givet ved formel (11.2).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \left(\frac{E}{1 - \nu^2}\right) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix}$$
(11.2)

hvor

Ε	er elastitetsmodulen
v	er Poissons forhold

I det følgende gættes på flytningsfelter givet ved (11.3) og (11.4). Disse gæt vælges således randbetingelserne overholdes. Et eksempel på en randbetingelse, der ikke er overholdt er hvis funktionen er lig en konstant. Dette er ikke muligt idet $u_x(0,0)$ =konstant ikke overholder randbetingelserne.

$$u_x(x,y) \tag{11.3}$$

$$u_{y}(x,y) \tag{11.4}$$

Sammenhængen mellem tøjninger og flytninger er givet ved formel (11.5), (11.6) og (11.7)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{11.5}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{11.6}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$
(11.7)

Herved kan den potentielle energi opstilles udtrykt ved flytningsfelterne (11.8).

$$\Pi_{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1 - \nu^{2}} \right) \int_{V} \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy} \right\} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (1 - \nu) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\} dV$$

$$-\frac{1}{2} P \cdot u_{y} \left(0, R \right)$$

$$(11.8)$$

Ved omskrivning af formel (11.8) til polære koordinater haves (11.9).

$$\Pi_{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1 - v^{2}} \right) \int_{0}^{\frac{\pi}{2} R} \left\{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad 2\varepsilon_{xy} \right\} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (1 - v) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{array} \right\} t \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$-\frac{1}{2} P \cdot u_{y} \left(\frac{\pi}{2} , R \right)$$

$$(11.9)$$

Den potentielle energi kan bestemmes som funktion af konstanterne (a_i, b_i) i flytningsligningerne (11.3) og (11.4). Den mindste energi findes ved at sætte variationen af Π_p lig 0 i forhold til hver enkelt ubekendt konstant i formel (11.3) og (11.4). Ligninger skrives på matriceform, idet de ubekendte konstanter kun indgår i første orden, og løsningen findes af formel (11.10).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{cases} \boldsymbol{a}_{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{0} \\ \vdots \end{cases} = \{ \boldsymbol{P} \} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{a}_{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{0} \\ \vdots \end{cases} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}^{-1} \{ \boldsymbol{P} \}$$
(11.10)

hvor

[A] er koefficientmatricen.

 $\{P\}$ er lastvektoren.

Ved indsættelse af konstanterne i udtrykket for den potentielle energi kan denne beregnes. I det følgende afsnit er der givet et eksempel på ovenstående fremgangsmetode til bestemmelse af den potentielle energi.

11.2 Eksempel på flytningsfelt

I det følgende gættes på et flytningsfelt givet ved (11.11) og (11.12).

$$u_x = 0$$
 (11.11)

$$u_{y} = b_{1} \cdot y^{2} + b_{2} \cdot y^{4} + b_{3} \cdot y^{6}$$
(11.12)

Ved anvendelse af formel (11.5), (11.6) og (11.7) på flytningsfelterne bestemmes tøjningerne.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot 0 = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \left(b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 \right)}{\partial y} = 2b_1 \cdot y + 4b_2 \cdot y^3 + 6b_3 \cdot y^5 = 0$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial \left(b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 \right)}{\partial x} \right) = 0$$

Tøjningsvektoren er givet ved formel (11.13).

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{cases} 0 \\ 2b_1 \cdot y + 4b_2 \cdot y^3 + 6b_3 \cdot y^5 \\ 0 \end{cases}$$
(11.13)

Til beregning af integralet i polære koordinater omskrives formel (11.13) til (11.14).

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{cases} 0\\ 2b_1 \cdot r \cdot \sin(\theta) + 4b_2 \cdot r^3 \cdot \sin(\theta)^3 + 6b_3 \cdot r^5 \cdot \sin(\theta)^5 \\ 0 \end{cases}$$
(11.14)

Dette udtryk indsættes i (11.9), hvorved den potentielle energi beregnes ved (11.15).

$$\Pi_{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1 - v^{2}} \right) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{R} \left(2 \cdot b_{1} \cdot r \cdot \sin(\theta) + 4 \cdot b_{2} \cdot r^{3} \cdot \sin(\theta)^{3} + 6 \cdot b_{3} \cdot r^{5} \cdot \sin(\theta)^{5} \right)^{2} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta - \frac{1}{2} \cdot P \cdot \left(b_{1} \cdot R^{2} + b_{2} \cdot R^{4} + b_{3} \cdot R^{6} \right)$$

$$(11.15)$$

Ved integration haves en ligning med konstanterne fra flytningsfeltet som ubekendte. Ved at sætte variationen af Π_p lig med 0, med hensyn til hver enkelt konstant, kan den mindste energi bestemmes for et flytningsfelt.

I det konkrete tilfælde er matricen givet ved formel (11.16), hvor R er radius.

$$\frac{-E\pi}{\nu^2 - 1} \begin{bmatrix} 5 \cdot R^4 & 5 \cdot R^6 & 4,6875 \cdot R^8 \\ 5 \cdot R^6 & 6,25 \cdot R^8 & 6,5625 \cdot R^{10} \\ 4,6875 \cdot R^8 & 6,5625 \cdot R^{10} & 7,383 \cdot R^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} -R^2 \cdot P \\ -R^4 \cdot P \\ -R^6 \cdot P \end{bmatrix}$$
(11.16)

Konstanterne $\{b\}$ bestemmes ved formel (11.16) til (11.17).

$$\{b\} = \frac{P \cdot \left(\nu^2 - 1\right)}{E} \begin{bmatrix} 2,04 \cdot 10^{-5} \\ 4,36 \cdot 10^{-9} \\ 4,66 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix}$$
(11.17)

Ved indsættelse af disse konstanter i ligningen for den potentielle energi kan energien beregnes. For de aktuelle værdier af konstanterne er den potentielle energi Π_p lig -91,3.

11.3 Resultater

Gæt	$u_{x}(x,y)$	$u_{y}(x,y)$	Π_{p}
1	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6$	-91,3
2	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8$	-91.3
3	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10}$	-94,6
4	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10} + b_6 \cdot y^{12}$	-94,6
5	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8$	-99,0
6	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 \cdot x + b_4 \cdot y^8$	-159,2
7	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3 + a_3 \cdot x^5$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10} \cdot x^2 + b_6 \cdot y^{12} \cdot x$	-149,3

En række gæt på funktionerne $u_x(x,y)$ og $u_y(x,y)$ er angivet i tabel 11.1.

 Tabel 11.1: Potentiel energi for flytningsfelterne.

Forud for resultaterne i tabel 11.1 er der foretaget en analyse af blandt andet konsekvensen af gæt på lige og ulige potenser. Denne analyse viser, at lige potenser og ulige potenser på henholdsvis $u_x(x,y)$ og $u_y(x,y)$ giver løsninger, der ikke er mulige, cd-bilag.



Udbøjningerne er skitseret på figur 11.2, hvor nogle af gættene er undladt, da de stort set er sammenfaldende.

Figur 11.2: Udbøjning skaleret 1000 gange.

Gæt 6, der har væsentlig mindre energi end de øvrige gæt viser sig at have et knæk op af xaksen. Dette opfylder til dels ikke randbetingelserne for en linielast, men for en punktlast er det muligt at have et knæk. Det må derfor forventes, at den potentielle energi for cirkelskiven med punktlaster giver mindre energi end for linielaster. Til sammenligning med de øvrige modeller er udbøjningen bestemt, jf. tabel 11.2.

Gæt:	u _x (48,0)	u _v (0,48)
1	0	-0,0052
2	0	-0,0052
3	0	-0,0052
4	0	-0,0052
5	0,0023	-0,0057
6	0,0023	-0,0061
7	0,0024	-0,0058

Tabel 11.2: Udbøjningen i to udvalgte punkter.

Kapitel 12 Ritz metoden for porøs cirkelskive

Teorien for Ritz-metoden er gennemgået i kapitel 11, hvorfor der i det følgende kun angives resultaterne for den porøse cirkelskive.

12.1 Resultater

De bedste gæt af funktionerne $u_x(x,y)$ og $u_y(x,y)$ er angivet i tabel 12.1, cd-bilag.

Gæt	$u_{x}(x,y)$	$u_{v}(x,y)$	Π_{p}
1	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6$	-146,3
2	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8$	-146,3
3	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10}$	-151,5
4	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10} + b_6 \cdot y^{12}$	-151,5
5	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8$	-161,3
6	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 \cdot x + b_4 \cdot y^8$	-260,4
7	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3 + a_3 \cdot x^5$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10} \cdot x^2 + b_6 \cdot y^{12} \cdot x$	-244,4

Tabel 12.1: Potentiel energi for flytningsfelterne.

Udbøjningerne er skitseret på figur 12.1, hvor nogle af gættene er undladt, da de stort set er sammenfaldende.





Det viser sig at konklusionerne fra den massive cirkelskive ligeledes gør sig gældende for den porøse cirkelskive, da det eneste der er ændret er elasticitetsmodulen. Til sammenligning med de øvrige modeller er udbøjningen bestemt, jf. tabel 12.2.

Gæt:	u _x (48,0)	u _v (0,48)
1	0	-0,0081
2	0	-0,0081
3	0	-0,0082
4	0	-0,0081
5	0,0040	-0,0093
6	0,0042	-0,010
7	0,0041	-0,0093

 Tabel 12.2: Udbøjningen i to udvalgte punkter.

Kapitel 13 Numeriske modeller af cirkelskive

I dette afsnit opstilles numeriske modeller for cirkelskiven, hvorfra der bestemmes spændinger, flytninger og potentiel energi, som sammenlignes for de forskellige modeller. De modeller, der anvendes er:

- Model Q4s bestående af CST-elementer (Constant Strain Triangles) og isoparametriske firkantselementer med henholdsvis tre og fire knuder, hvor flytningerne af siderne mellem knuderne beskrives ved førstegradspolynomier.
- Model Q8s bestående af LST-elementer (Linear Strain Triangles) og isoparametriske firkantselementer med henholdsvis seks og otte knuder, hvor flytningerne af siderne mellem knuderne beskrives ved andengradspolynomier.
- Model LSTs bestående af LST-elementer.
- Model SHEs bestående af spændingshydride Q4 elementer og CST elementer.

I alle modellerne er der to frihedsgrader i hver knude. Desuden er alle modeller parametriseret så der kan ændres på lasten, P, radius, R, elasticitetsmodul, E, Poissons forhold, v, samt antallet af elementer i radiær retning. Den generelle FEM teori er beskrevet i bilag C. Alle modeller findes som cd-bilag.

13.1 Opbygning af model Q4s

Model Q4s er opbygget af trekanter og firkanter som vist på figur 13.1, hvor det bemærkes at trekanterne kun anvendes i den inderste cirkelring. Såfremt der anvendes firkanter i den inderste ring, vil to knuder i hvert element være sammenfaldende i centrum, hvilket kan skabe problemer under beregningerne, da elementet derved får en anden form end forudsat i elementopbygningen.



Figur 13.1: Princip for elementopbygning og globale knudenumre for model Q4s.

Den principielle opbygning er vist i figur 13.1 for en opbygning af den kvarte cirkelbue med fire elementer i radiær retning, hvor de globale knudenumre er angivet. Desuden er nummereringen af elementerne vist. For trekanterne er elementnummeret angivet i en trekant og for firkanterne i en firkant.

For firkanterne anvendes fire Gauss-punkter ved bestemmelse af flytninger og spændinger. Ved bestemmelse af spændingerne beregnes disse, så de er sammenfaldende med knuderne, hvorved der opnås en jævn afbildning af spændingerne. For trekanterne bestemmes spændingerne i ét punkt, hvorved der ikke opstår variation i spændingen henover elementet.

Afstanden mellem de enkelte cirkelbuer er konstant, hvilket kan betyde, at nogle af elementerne vil blive lange "rektangler", især når der anvendes mange elementer for at tilnærme de rette linier til en cirkelbue, eller hvis forholdet mellem elementer i radiær og tangentiel retning vælges uhensigtsmæssigt. Hvis "rektanglerne" bliver meget aflange, kan resultaterne fra beregningen indeholde fejl. Grunden hertil er, at alle elementer skal transformeres tilbage til det oprindelige koordinatsystem fra et dimensionsløst koordinatsystem (ζ , η), bilag D, og hvis de deformerede elementer er aflange, bliver tilnærmelsen ved transformationen for dårlig.

Da elementerne i denne model kun kan deformeres lineært, kan der forekomme problemer ved eksempelvis bøjning, hvor der skal mange elementer til for at komme frem til en korrekt løsning. I stedet er det muligt at anvende elementer, der kan deformeres efter andengradspolynomier. Denne type elementer anvendes i model Q8s, jf. afsnit 13.2.

13.2 Opbygning af model Q8s

Model Q8s er opbygget af trekanter og firkanter, som ved Q4s modellen. Eneste forskel er at der er seks knuder i trekanterne og otte knuder i firkanterne, hvorved denne model er bedre til at modellere bøjning.

13.3 Opbygning af model LSTs

Denne model opbygges udelukkende af LST-trekanter. Den principielle opbygning er vist på figur 13.2, mens knudenummerering er vist for et udsnit af den kvarte cirkelskive på figur 13.3.



Figur 13.2: Princip for elementopbygning og elementnummerering for model LSTs.



Figur 13.3: Knudenummerering for udsnit af kvart cirkelskive.

I denne model vælges antallet af elementer i tangentiel retning og antallet af elementer i radiær retning bestemmes som

$$N_{elem,bred} = 2N_{elem,cirk} - 1$$

13.4 Opbygning af model SHEs

Denne model er opbygget af spændingshybride Q4 elementer og CST elementer, hvor modellen rent opbygningsmæssigt er identisk med den vist på figur 13.1, hvor det bemærkes, at trekanterne kun anvendes i den inderste cirkelring for at samle skiven. Som tidligere nævnt kan Q4 elementerne samles i den inderste del, hvilket imidlertid ikke benyttes, da det kan skabe numeriske beregningsfejl, da elementet derved får en anden form end forudsat i elementopbygningen.

Ved det spændingshybride Q4 element anvendes fire og otte Gauss-punkter på henholdsvis arealet og randen ved bestemmelse af flytninger og spændinger. Ved bestemmelse af spændingerne beregnes disse, så de er sammenfaldende med knuderne, hvorved der opnås en jævn afbildning af spændingerne. Trekanterne beregnes som tidligere.

Fordelen ved at bruge spændingshybride elementer, i forhold til almindelige elementer bygget på potentielenergi, er, at de teoretisk burde modellere mere fleksible systemer samtidig med, at spændingerne konvergerer hurtigere. Teorien er behandlet i bilag E.

13.5 Konvergensstudie af cirkelskive

I dette afsnit foretages et konvergensstudie på flytninger og spændinger i skivemodellerne. Dette gøres ved at estimere eksakte værdier af disse størrelser ud fra værdier fra tre forskellige mesh. Teorien er beskrevet i kapitel 6.5.

13.5.1 Konvergens af Q4s-model

For Q4s-modellen anvendes elementlængden givet ved formel (13.1).

$$h = \frac{R\pi}{4N_{cirk}}$$
(13.1)

hvor

R er ydre radius i cirkelskiven

 N_{cirk} er antallet af elementer i cirkelbuen

Der vælges et forhold mellem elementlængderne i de forskellige modeller på to, som opnås ved at fordoble antallet af elementer i tangentiel retning ved et nyt mesh. De flytninger og spændinger, som bestemmes ud fra modellen, jf. tabel 13.1, bestemmes i punktet (x, y) = (0, 39.5), jf. figur 13.4 for en belastning på den kvarte cirkelskive på 15 kN.



Figur 13.4: Belastning og beregningspunkt for konvergensstudie.

Antal elementer	Antal frihedsgrader	Elementlængde	Flytning $u_{y}[\mu m]$	Spænding $\sigma_{_{yy}}$ [MPa]	Beregningstid [s]
1024	2114	1,94	-11,2629	-25,5	3
4096	8322	0,97	-11,2612	-25,8	44
16384	33026	0,48	-11,2608	-26,0	737

Tabel 13.1: Værdier til estimering af eksakte værdier.

Med værdierne i tabel 13.1 bestemmes konvergensraten for flytningen.

$$q_u = \frac{\ln\left(\frac{-11,2629+11,2612}{-11,2612+11,2608}\right)}{\ln(2)} = 2,01$$

Den teoretiske konvergensrate for flytningen i Q4-elementerne er to, idet fejlen på flytningen forventes at være af 2. orden. Dette stemmer meget godt overens med den fundne værdi.

Herefter estimeres den eksakte værdi.

$$u_{x,\infty} = \frac{-11,2612 + 11,2608(2)^{2,01}}{1 - (2)^{2,01}} = -11,2607 \ \mu \text{m}$$

På figur 13.5 ses, at flytningen konvergerer mod den eksakte værdi ved flere elementer, svarende til et finere mesh, og allerede ved 1000 elementer ligger den beregnede værdi meget tæt på den eksakte.



Figur 13.5: Konvergens for flytningen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.

På figur 13.6 ses den relative fejl på flytningen. Det ses, at fejlen er 1‰ ved cirka 200 elementer, og ved 2000 elementer er fejlen cirka 0,1‰, så med hensyn til flytningen er det uhensigtsmæssigt at lave alt for fin inddeling, idet beregningstiden øges kraftigt ved flere elementer, jf. tabel 13.1.



Figur 13.6: Relativ fejl på flytningen. Linien angiver den forventede fejl.

For spændingerne findes på tilsvarende måde konvergensrate og en eksakt værdi estimeres.

$$q_{\sigma} = \frac{\ln\left(\frac{-25, 5+25, 8}{-25, 8+26}\right)}{\ln\left(2\right)} = 0,89$$

Den teoretiske konvergensrate for spændingen i Q4-elementerne er 1, idet fejlen på spændingen forventes at være af 1. orden. Dette stemmer overens med den fundne værdi.

$$\sigma_{yy,\infty} = \frac{-25,8 + 26(2)^{0,89}}{1 - (2)^{0,89}} = -26,2 \text{ MPa}$$

På figur 13.7 ses, at spændingen konvergerer mod den eksakte værdi, imidlertid noget langsommere end flytningen, hvilket konvergensraten ligeledes siger. Desuden ses på figur 13.8, at fejlen på spændingerne er 1% ved cirka 10000 elementer, og det kræver lang beregningstid at minimere denne fejl yderligere, jf. tabel 13.1.



Figur 13.7: Konvergens for spændingen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.



Figur 13.8: Relativ fejl på spændingen. Linien angiver den forventede fejl.

13.5.2 Konvergens af Q8s-model

For Q8s-modellen anvendes samme elementlængde som i Q4s-modellen, jf. formel (13.1).

Der vælges også her et forhold mellem elementlængderne i de forskellige modeller på to. De flytninger og spændinger, som bestemmes ud fra modellen, jf. tabel 13.2, bestemmes i punktet (x, y) = (0, 39.5) for en belastning på den kvarte cirkelskive på 15 kN.

Antal elementer	Antal frihedsgrader	Elementlængde	Flytning $u_y[\mu m]$	Spænding σ_{yy} [MPa]	Beregningstid [s]
256	1602	3,88	-11,26059	-26,15	1,6
1024	6274	1,94	-11,26063	-26,17	17
4096	24834	0,97	-11,26066	-26,18	282

Tabel 13.2: Værdier til estimering af eksakte værdier.

Med værdierne i tabel 13.2 bestemmes konvergensraten for flytningen.

$$q_u = \frac{\ln\left(\frac{-11,26059+11,26063}{-11,26063+11,26066}\right)}{\ln\left(2\right)} = 0,1$$

Den teoretiske konvergensrate for flytningen i Q8-elementerne er tre, idet fejlen på flytningen forventes at være af 3. orden. Denne fundne konvergensrate er meget mindre end forventet, og betyder derfor, at flytningen konvergerer langsomt når antallet af elementer øges. Men det ses på figur 13.9, at med få elementer, ligger resultaterne tæt på den eksakte værdi, der estimeres.

$$u_{x,\infty} = \frac{-11,26063 + 11,26066(2)^{0,1}}{1 - (2)^{0,1}} = -11,2612 \text{ }\mu\text{m}$$

Dette ses ligeledes på figur 13.10, hvor fejlen er næsten konstant lig 0,1‰ fra 50 elementer.



Figur 13.9: Konvergens for flytningen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.



Figur 13.10: Relativ fejl på flytningen. Linien angiver den forventede fejl.

For spændingerne findes på tilsvarende måde konvergensrate, og en eksakt værdi estimeres.

$$q_{\sigma} = \frac{\ln\left(\frac{-26,15+26,17}{-26,17+26,18}\right)}{\ln\left(2\right)} = 1,5$$

Den teoretiske konvergensrate for spændingen i Q8-elementerne er to, idet fejlen på spændingen forventes at være af 2. orden. Dette stemmer ikke helt overens med den fundne værdi.

$$\sigma_{yy,\infty} = \frac{-26,17 + 26,18(2)^{1.5}}{1 - (2)^{1.5}} = -26,19 \text{ MPa}$$

På figur 13.11 ses at spændingen konvergerer mod den eksakte værdi. Desuden ses på figur 13.12, at fejlen på spændingerne er 1‰ ved cirka 1000 elementer.



Figur 13.11: Konvergens for spændingen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.



Figur 13.12: Relativ fejl på spændingen. Linien angiver den forventede fejl.

13.5.3 Konvergens af LSTs-model

For LSTs-modellen anvendes ligeledes elementlængden givet ved formel (13.1).

Der vælges et forhold mellem elementlængderne i de forskellige modeller på to, som opnås ved at fordoble antallet af elementer i tangentiel retning ved et nyt mesh. De flytninger og spændinger, som bestemmes ud fra modellen, jf. tabel 13.3, bestemmes i punktet (x, y) = (0, 39.5) for en belastning på den kvarte cirkelskive på 15 kN, da der i dette punkt kan sammenlignes med forsøgsresultaterne.

Antal elementer	Antal frihedsgrader	Elementlængde	Flytning $u_y[\mu m]$	Spænding $\sigma_{_{yy}}$ [MPa]	Beregningstid [s]
496	2082	3,88	-11,2629	-25,31	2
2016	8258	1,94	-11,2611	-25,74	30
8128	32898	0,97	-11,2607	-25,97	433

Tabel 13.3: Værdier til estimering af eksakte værdier. Værdierne er beregnet på samme maskine.

Der er foretaget tre beregninger til bestemmelse af konvergensraten og estimering af den eksakte værdi. Herved bliver konvergensraten for flytningen.

$$q_u = \frac{\ln\left(\frac{-11,2629+11,2611}{-11,2611+11,2607}\right)}{\ln(2)} = 2,4$$

Den teoretiske konvergensrate for flytningen i LST-elementerne er tre, idet fejlen på flytningen forventes at være af 3. orden, hvilket ikke stemmer helt overens med den fundne værdi.

Herefter estimeres den eksakte værdi til

$$u_{x,\infty} = \frac{-11,2629\,\mu\text{m} + 11,2611\,\mu\text{m}(2)^{2,4}}{1 - (2)^{2,4}} = -11,2606\,\mu\text{m}$$

På figur 13.13 ses, at flytningen konvergerer mod den eksakte værdi ved flere elementer, svarende til et finere mesh, og allerede ved 1000 elementer ligger den beregnede værdi meget tæt på den eksakte.



Figur 13.13: Konvergens for flytningen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.

På figur 13.13 ses den relative fejl på flytningen. Det ses, at fejlen er 1‰ ved cirka 100 elementer og ved 1000 elementer er fejlen cirka 0,1‰. Med hensyn til flytningen er det uhensigtsmæssigt at lave alt for fin inddeling, idet beregningstiden øges kraftigt ved flere elementer, jf. tabel 13.3.



Figur 13.14: Relativ fejl på flytningen. Linien angiver den forventede fejl.

For spændingerne findes på tilsvarende måde konvergensrate og en eksakt værdi estimeres.

$$q_{\sigma} = \frac{\ln\left(\frac{-25,31+25,74}{-25,74+25,97}\right)}{\ln(2)} = 0,97$$

Den teoretiske konvergensrate for spændingen i LST-elementerne er to, idet fejlen på spændingen forventes at være af 2. orden. Dette stemmer ikke overens med den fundne værdi, og spændingen konvergerer derfor langsommere end forventet.

$$\sigma_{yy,\infty} = \frac{-25,31+25,74(2)^{0.97}}{1-(2)^{0.97}} = -26,2 \text{ MPa}$$

På figur 6.11 ses at spændingen konvergerer mod den eksakte værdi, men noget langsommere end flytningen, hvilket konvergensraten ligeledes antyder. Desuden ses på figur 6.12, at fejlen på spændingerne er 1% ved cirka 5000 elementer, og det kræver lang beregningstid at minimere denne fejl yderligere, jf. tabel 13.3.



Figur 13.15: Konvergens for spændingen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.



Figur 13.16: Relativ fejl på spændingen. Linien angiver den forventede fejl.

13.5.4 Konvergens af spændingshybrid element

For modellen opbygget af spændingshybride Q4 elementer anvendes som tidligere elementlængden givet ved (13.1).

Der vælges igen et forhold mellem elementlængderne i de forskellige modeller på to, som opnås ved at fordoble antallet af elementer i tangentiel retning ved et nyt mesh. De flytninger og spændinger, som bestemmes ud fra modellen, jf. tabel 13.4, bestemmes i punktet (x, y) = (0, 39.5) for en belastning på den kvarte cirkelskive på 15kN.

Antal elementer	Antal frihedsgrader	Elementlængde	Flytning $u_y[\mu m]$	Spænding $\sigma_{_{yy}}$ [MPa]	Beregningstid [s]
144	314	5,17	-11,2609	-24,7	0,6
576	1202	2,58	-11,2610	-25,4	2,3
2304	4706	1,29	-11,2608	-25,8	18,5

Tabel 13.4: Værdier til estimering af eksakte værdier. Værdierne er beregnet på samme maskine.

Med værdierne i tabel 13.4 bliver konvergensraten for flytningen et komplekst tal, idet det bemærkes, at flytningens størrelse "svinger" omkring en værdi på -11,2609 μ m. Desuden har det vist sig, at ved mange elementer, er både flytninger og spændinger behæftet med store fejl, hvilket kunne tyde på, at elementerne har svært ved at modellere konstante til-stande, hvorved numerisk støj bliver tydeligere.

På figur 13.5 ses, at flytningen ligger meget tæt på den eksakte værdi allerede ved cirka 150 elementer og derefter svinger flytningen omkring den eksakte værdi op til omkring 3000 elementer, hvor flytningen bliver alt for lille. Det har ligeledes vist sig, at flytningen ved cirka 4000 elementer er helt forkert og antager en positiv værdi.



Figur 13.17: Konvergens for flytningen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.

På figur 13.6 ses den relative fejl på flytningen. Det ses, at fejlen ikke følger en ret linie i dobbeltlogaritmisk afbildning, som var forventet. Dette skyldes, at konvergensraten er kompleks. Det bemærkes imidlertid, at størrelsen af fejlen på flytningen er meget lille, men ikke alle beregningspunkter kan plottes i denne figur på grund af den komplekse konvergensrate.



Figur 13.18: Relativ fejl på flytningen. Linien angiver den forventede fejl.

For spændingerne findes konvergensrate, og en eksakt værdi estimeres.

$$q_{\sigma} = \frac{\ln\left(\frac{-24,7+25,4}{-25,4+25,8}\right)}{\ln(2)} = 0,85$$
$$\sigma_{yy,\infty} = \frac{-25,4\text{MPa} + 25,8\text{MPa}(2)^{0.85}}{1-(2)^{0.85}} = -26,2\text{MPa}$$

På figur 13.7 ses, at spændingen konvergerer mod den eksakte værdi, men ved 4000 elementer bliver modellen dårlig og giver en meget stor fejl, hvilket ligeledes kan ses på figur 13.8.



Figur 13.19: Konvergens for spændingen. Linien angiver estimatet på den eksakte værdi.



Figur 13.20: Relativ fejl på spændingen. Linien angiver den forventede fejl.

13.5.5 Sammenligning af modeller

Alle fire modeller konvergerer hurtigt på flytningen, jf. figur 13.21, hvor det også ses at Q4-modellen konvergerer langsomst af de tre, hvilket også er forventeligt, idet element-flytningerne i disse elementer er simplere end for de to andre. Det bemærkes, at Q8s-modellen og SHEs-modellen konvergerer hurtigst med få elementer.



Figur 13.21: Konvergens på flytning for fire skivemodeller.

Men på figur 13.22 ses det, at den relative fejl for Q8s-elementerne ikke minimeres væsentligt med flere elementer. Desuden ses, at SHEs-modellen er klart den bedste, men når antallet af elementer øges bliver fejlen på SHEs-modellen stor. Derfor er LSTs-modellen den bedste når inddelingen bliver finere end cirka 4000 elementer. Dette viser, at SHEsmodellen ikke som forventet modellerer mere fleksibelt end elementer bygget på potentiel energi.



Figur 13.22: Relativ fejl på flytning for fire skivemodeller.

Alle modellerne konvergerer mod den eksakte værdi af spændingen, jf. figur 13.23, men noget langsommere end flytningen. Q8s-modellen konvergerer hurtigst, og den relative fejl minimeres også hurtigere for denne model end for de to andre, jf. figur 13.24. Derfor er Q8s-modellen den bedste til at bestemme spændinger i cirkelskiven. Dette er overraskende, da det forventes, at SHEs-modellen vil konvergere hurtigere på spændingerne end modeller bygget på potentiel energi.


Figur 13.23: Konvergens for spændingen for fire skivemodeller.



Figur 13.24: Relativ fejl på spændingen for fire skivemodeller.

13.6 Resultater for massiv cirkelskive

I dette afsnit bestemmes flytninger, spændinger og potentiel energi i den kvarte cirkelskive, jf. figur 13.25. Dette gøres for alle FEM-modeller af skiven, idet den konstitutive matrice fra afsnit 3.1 benyttes. Belastningen, som disse parametre bestemmes for, er 15 kN på den kvarte cirkelskive.



Figur 13.25: Placering af punkter hvor parametre bestemmes.

I tabel 13.5 ses flytninger, spændinger og potentiel energi bestemt for de tre cirkelskivemodeller, hvor der er valgt tilstrækkelig mange elementer til, at fejlen er minimal, jf. kapitel 13.5. Det ses, at størrelsen af flytninger, spændinger og potentiel energi ikke ændres meget fra model til model. Til sammenligning med de analytiske metoder og forsøgene anvendes resultatet fra LSTs-modellen.

			1			2			3		
FEM-	u_y	$\sigma_{_{xx}}$	$\sigma_{_{yy}}$	$\sigma_{_{xy}}$	$\sigma_{_{xx}}$	$\sigma_{_{yy}}$	$\sigma_{_{xy}}$	$\sigma_{_{XX}}$	$\sigma_{_{yy}}$	$\sigma_{_{xy}}$	Π_P
model	[mm]										[Nmm]
Q4s	-0,0145973	-0,8	-6,4	3,9	6,0	-18,1	0	60	-26,3	0,1	-588
Q8s	-0,0145972	-0,8	-6,3	3,8	6,0	-18,1	0	6,0	-25,9	0,2	-593
LSTs	-0,0145973	-0,8	-6,3	3,8	6,0	-18,1	0	6,0	-26,0	0,2	-599
SHEs	-0,0146033	-0,7	-6,2	3,7	6,05	-18,1	0	5,9	-26,8	0,5	-

 Tabel 13.5: Resultater fra massiv cirkelskive.

På figur 13.26 er vist spændingsplot i de to normalspændingsretninger samt forskydningsspænding for model LSTs.



Figur 13.26: Spændingsvariationer i massiv cirkelskive.

13.7 Resultater for porøs cirkelskive

I dette afsnit bestemmes flytningen i den kvarte cirkelskive i punktet (0,48), jf. figur 13.27, svarende til det sted, der måles i forsøget. Dette gøres for alle FEM-modeller af skiven, idet den konstitutive matrice fra kapitel 8 benyttes. Ligeledes bestemmes den potentielle energi i den kvarte cirkelskive. Belastningen, som disse parametre bestemmes for, er 15 kN på den kvarte cirkelskive.



Figur 13.27: Placering af punkt, hvor flytninger bestemmes.

I tabel 13.6 ses resultaterne for de tre cirkelskivemodeller, hvor der er valgt tilstrækkelig mange elementer til, at fejlen er minimal, jf. kapitel 13.5. Det ses, at størrelsen af flytningerne ikke ændres meget fra model til model. Til sammenligning med de analytiske metoder og forsøgene anvendes resultatet fra LSTs-modellen.

FEM-model	<i>u_y</i> [mm]	Π_{P} [Nmm]
Q4s	-0,0219330	-778,9
Q8s	-0,0219323	-971,4
LSTs	-0,0219323	-893,5
SHEs	-0,0219395	-

Tabel 13.6: Resultater fra	ı porøs cirkelskive.
----------------------------	----------------------

På figur 13.28 er vist spændingsplot i de to normalspændingsretninger samt forskydningsspænding for model LSTs.



Figur 13.28: Spændingsvariationer i porøs cirkelskive.

Det bemærkes, at spændingsvariationerne er identiske for den massive og porøse cirkelskive, hvilket er forventet, idet spændingsvariationen ikke afhænger af materialekonstanterne.

Kapitel 14 Forsøgsresultater for cirkelskive

Til verificering af de numeriske og analytiske beregninger er der for cirkelskiven udført forsøg, hvor forsøgsopstillingen er vist på figur 14.1.



Figur 14.1: Massiv cirkelskive med flytningsmåler og straingages.

På forsøgselementet er der placeret flytningsmålere på begge sider, som måler flytningen over en bestemt længde. Til bestemmelse af spændingerne i bestemte punkter anvendes tre rosettegages, foruden fire enkeltgages. For nærmere forsøgsbeskrivelse henvises til forsøg 4, hvorfor udelukkende resultater angives i det følgende.

Placeringen af straingages fremgår af figur 14.2.



Figur 14.2: Placering af gages for massiv cirkelskive.

Prøveelementet belastes med henholdsvis 0 til 30 kN og 0 til 60 kN, hvor der kontrolleres for plastisk deformation ved at undersøge målingerne ved afbelastning. Til sammenligning med de analytiske og numeriske beregninger er spændingerne bestemt ved 30 kN, jf. tabel 14.1.

Rosettegage	σ_{xx}	$\sigma_{_{yy}}$	σ_{xy}
1	-0,27	-7,86	2,18
2	6,48	-18,63	-0,12
3	5,01	-23,40	0,09

Tabel 14.1: Spænding i MPa for en last på 30 kN.

Forholdet mellem flytning og belastning er bestemt ved benyttelse af flytningsmålerne, hvilket resulterer i formel (14.1).

$$P = 977, 23 \cdot u \tag{14.1}$$

hvor

P er lasten [kN]

u er flytningen [mm]

Ved belastning af prøveelementet med 30 kN findes flytningen, jf. formel (14.1).

$$u = \frac{30}{977,23} = 0,03 \text{ mm}$$

Ligeledes er der udført forsøg på den porøse cirkelskive, hvor forsøgsopstillingen fremgår af figur 14.3.



Figur 14.3: Porøs cirkelskive med flytningsmåler.

Det fremgår af forsøgsopstillingen af der kun er benyttet én flytningsmåler. Forsøgsbeskrivelsen for den porøse cirkelskive fremgår af forsøg 5, hvilket har resulteret, i forholdet mellem belastning og flytning, givet ved formel (14.2).

$$P = 607,062 \cdot u \tag{14.2}$$

Ved belastning med 30 kN bestemmes flytningen jf. formel (14.2).

$$u = \frac{30}{607,062} = 0,05 \text{ mm}$$

Kapitel 15 Sammenligning af resultater

I det følgende kapitel sammenlignes resultaterne fra de analytiske og numeriske modeller og forsøget udført i laboratoriet.

Spændinger fundet ved Fourier rækkeudviklingen samt spændingerne beregnet ved kompleks funktionsteori sammenlignes med spændingerne beregnet ved FEM. Ritz-metoden levere en udbøjningsfigur fra hvert gæt samt en potentiel energi. Dette sammenlignes med resultater fra FEM og flytninger sammenlignes desuden med dem målt i forsøg.

15.1 Sammenligning af spændinger

Spændingerne beregnet ved den komplekse funktionsteori og Fourier rækkeudvikling anvender Airy's spændingsfunktion, hvor der forudsættes en punktlast. Forskellen er blot den matematiske udledning. Disse to plot sammenlignes med resultaterne fra det numeriske LST element, jf. figur 15.1, hvor spændingsplottet for σ_{yy} er optegnet. Det ses fra figur 15.1, at der er meget god overensstemmelse mellem plottene.



Figur 15.1: Spændingsplot for σ_{yy} for Fourier, Kompleks funktionsteori og numerisk model.

På grund af spændingens uafhængighed af elasticitetsmodulen er spændingerne beregnet ved FEM ens for den massive cirkelskive og den porøse cirkelskive.

Til en mere nøjagtig sammenligning er spændingerne beregnet i tre punkter for de to analytiske modeller og FEM samt forsøget. De tre punkter fremgår af figur 15.2 og er angivet i tabel 15.1.



Figur 15.2: Placering af sammenligningspunkter.

Beregningspunkt		1			2			3	
Metode	$\sigma_{_{xx}}$	$\sigma_{_{yy}}$	$\sigma_{\scriptscriptstyle xy}$	$\sigma_{_{XX}}$	$\sigma_{_{yy}}$	$\sigma_{\scriptscriptstyle xy}$	$\sigma_{_{xx}}$	$\sigma_{_{yy}}$	$\sigma_{\scriptscriptstyle xy}$
Kompleks funktionsteori	-0,7	-6,4	3,7	6,0	-18,1	0	6,0	-26,1	0
Fourier	-0,8	-6,4	3,8	6,0	-18,1	0	6,0	-26,2	0
FEM – LST	-0,8	-6,4	3,9	6,0	-18,1	0	6,0	-26,0	0,2
Forsøg	-0,3	-7,9	2,2	6,5	-18,6	-0,1	5,0	-23,4	0,1

 Tabel 15.1: Spændinger i tre punkter.

Det fremgår af tabel 15.1, at der ikke er nævneværdige forskelle mellem de analytiske udtryk og FEM beregningerne. Derimod er værdierne af spændingerne for de fleste målepunkter mindre end de beregnede spændinger. Variationen kan skyldes, at der har været en forskel mellem den målte kraft og den virkelige kraft. Desuden er de analytiske og numeriske modeller udregnet for en punktlast, hvor skiverne i forsøget er belastet over et lille areal. Herudover afhænger spændingerne fra forsøgsresultaterne af elasticitetsmodulen, som ligeledes er fundet eksperimentelt og kan derfor være behæftet med fejl.

15.2 Sammenligning af flytninger og potentiel energi

Flytningsfigurerne er fundet ved hjælp af Ritz-metoden og FEM beregninger. I det følgende er der angivet to gæt på flytningsfelter, hvoraf det ene indeholder et knæk, hvor lasten påføres og den anden står vinkelret på y-aksen jf. figur 15.3. Figuren viser ligeledes udbøjningen for FEM beregninger og forskellen er, at effekten af punktlasten får FEM flytningsfiguren til at krumme meget mere end flytningsfelterne bestemt ved Ritz.



Figur 15.3: Sammenhæng mellem gæt på flytningsfelt og beregninger ved FEM, skaleret 1000 gange.

Da FEM flytningsfiguren har større flytninger end Ritz-metoden, må den potentielle energi være større for FEM beregningerne end for Ritz-metodens gæt. Dette kommer til udtryk i den potentielle energi, hvor FEM beregningerne, jf. tabel 15.2, angiver en væsentlig mindre energi end energien beregnet ved Ritz-metoden. Dette kan forklares med, at flytningsfeltet ved FEM har et større knæk. Ved at modellere en linielast i FEM-modellerne, vil resultaterne sandsynligvis ligge tættere på hinanden.

	Π_P massiv	Π_P porøs
Metode:	[Nmm]	[Nmm]
Ritz gæt 5	-99,0	-161,3
Ritz gæt 6	-159,2	-260,4
FEM - LST	-599,0	-893,5

Tabel 15.2: Potentiel energi.

	u_y massiv	<i>u_y</i> porøs		
Metode:	[mm]	[mm]		
Ritz gæt 5	-0,0057	-0,0093		
Ritz gæt 6	-0,0061	-0,010		
Forsøg	-0,0153	-0,0247		
FEM - LST	-0.0146	-0,0219		

Afslutningsvis sammenlignes de lodrette flytninger bestemt ved forsøget samt Ritz og FEM beregninger, jf. tabel 15.3.

 Tabel 15.3: Flytninger for den kvarte cirkelskive.

Forventeligt er flytningen for Ritz mindre end for FEM beregningerne. Flytningerne målt i forsøget er omkring 5% større end for FEM beregninger. Dette er en mindre forskel, der kan skyldes måleusikkerheder. Mod forventning er flytningen målt ved forsøget størst. Det kan forklares ved, at effekten af enkeltkraften forsvinder i målepunktet.

Del IV Cirkelring

Delindledning

I de følgende kapitler benyttes de, i del II, beregnede materialeparametre til analysering af henholdsvis massiv og porøs cirkelring, ved anvendelse af forskellige analytiske og numeriske metoder. Den porøse cirkelring antages udført i et homogent, isotropt, lineærelastisk materiale, hvorved den eneste forskel mellem beregninger af massiv og porøs cirkelskive bliver materialeparametrene.

Analytisk udledes bjælketeorien for krumme bjælker, ved benyttelse af det virtuelle arbejdes princip, hvorved det er muligt at bestemme flytninger i cirkelringen. Yderligere benyttes Ritz metoden til bestemmelse af flytningerne på cirkelringen, samt den potentielle energi.

Numerisk anvendes elementmetoden ved benyttelse af forskellige typer elementer, hvorved disse kan sammenholdes i forhold til spænding, flytning og potentiel energi. Ligeledes inddeles cirkelbuen i rette bjælke elementer ved benyttelse af henholdsvis Bernoulli-Euler og Timoshenko bjælketeori. I del III udførtes konvergensstudier af alle skive-modeller, hvorfor der udelukkende udføres konvergensstudier på bjælkemodellerne i del IV.

Til verificering af de analytiske og numerisk beregninger udføres forsøg, hvorved det vurderes hvilken metode, der giver det mest præcise bud på henholdsvis spændinger og flytninger.

Kapitel 16 Virtuelle kræfters princip

I dette kapitel beregnes snitkræfterne i en homogen cirkelring ved hjælp af virtuelle kræfters princip, VKP. På grund af symmetri betragtes kun den kvarte cirkelring. Målet er at bestemme udbøjningen af cirkelringen for en given kraft. Teorien for virtuelle flytningers princip for krumme bjælker er udledt i bilag B og benyttes i det følgende.

16.1 Forudsætninger

I det følgende regnes der på det statiske system skitseret på figur 16.1. Grundet understøtningsforholdene er der fire ukendte reaktioner og derfor er ligevægtsligningerne ikke tilstrækkelige til at bestemme reaktionerne.



Figur 16.1: Statisk system for den betragtede bjælkeudsnit.

Cirkelringen beregnes i det følgende som en Bernoulli-Euler bjælke.

16.2 Beregning af snitkræfter

Indledningsvis anvendes ligevægtsligningerne til bestemmelse af de ukendte kræfter på figur 16.2. Dette efterlader én ubekendt og denne bestemmes med VKP.



Figur 16.2: Udsnit af homogen cirkelring i ligevægt.

Med de, på figur 16.2, viste regneretninger anvendes vandret og lodret ligevægt til bestemmelse af R_1 og R_2 , jf. formel (16.1).

$$R_1 = \frac{1}{2}P$$

$$R_2 = 0$$
(16.1)

Ved momentligevægt bestemmes sammenhængen mellem endemomenterne ved (16.2).

$$M_1 = M_2 - \frac{P}{2}R$$
 (16.2)

For et udsnit af cirkelringen opstilles udtryk for snitkræfter som funktion af vinklen θ , jf. figur 16.3.



Figur 16.3: Snitkræfter i udsnit af cirkelring.

Ved vandret projektion isoleres normalkraften ved formel (16.3).

$$N = -\frac{V\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \tag{16.3}$$

Ved lodret projektion og indsættelse af udtrykket for normalkraften opstilles et udtryk for forskydningskraften ved formel (16.4).

$$0 = R_1 + N\cos(\theta) - V\sin(\theta) \Longrightarrow$$

$$V = R_1\sin(\theta)$$
(16.4)

Normalkraften bestemmes ved formel (16.5).

$$N = -R_1 \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = -R_1 \cos(\theta)$$
(16.5)

Momentligevægt i snittet giver relationen mellem momentet $M \circ g M_l$, givet ved (16.6).

$$M = M_1 + \frac{P}{2}R(1 - \cos(\theta))$$
(16.6)



Et virtuelt moment påføres i hver ende af den udskårne cirkelring, jf. figur 16.4.

Figur 16.4: Det påførte virtuelle moment.

Dette virtuelle kraftsystem er i ligevægt og kan derfor anvendes i de virtuelle kræfters princip.

Det indre virtuelle arbejde opstilles, jf. formel (16.7).

$$A_{i} = \int_{0}^{s} \left(\varepsilon(s) \delta N(s) + \kappa(s) \delta M(s) + \gamma(s) \delta V(s) \right) ds$$
(16.7)

De aktuelle snitkræfter omskrives til virkelige deformationer ved formel (16.8), (16.9) og (16.10). Formlerne er nærmere beskrevet i bilag B.

$$N = E \cdot A \cdot \varepsilon \tag{16.8}$$

$$M = I \cdot E \cdot \kappa \tag{16.9}$$

$$V = G \cdot A_K \cdot \gamma \tag{16.10}$$

Med de fundne snitkræfter, kan deformationerne fra formel (16.8), (16.9) og (16.10) omskrives til formel (16.11).

$$\varepsilon = \frac{-P\cos(\theta)}{2EA}$$

$$\kappa = \frac{M_1 + PR(1 - \cos(\theta))}{2EI}$$

$$\gamma = \frac{P\sin(\theta)}{2GA_k}$$
(16.11)

Det bemærkes, at det ikke har betydning for løsningen af ligningerne om der anvendes Bernoulli-Euler eller Timoshenkoteori, da det kun er det virtuelle momentet, der er forskellig fra nul.

De virtuelle momenter medfører ikke et ydre arbejde og derfor er det ydre arbejde lig 0. Herved kan (16.7) løses ved at integrere over vinklen fra 0 til $\pi/2$, hvilket løses ved (16.12)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{1} + \frac{P}{2}R - \frac{P}{2}R\cos(\theta)}{EI} \delta MR \cdot d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$= \frac{R}{EI} \left[M_{1}\theta + \frac{P}{2}R(\theta - \sin(\theta)) \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(M_{1} + \frac{P}{2} \cdot R \right) - \frac{P \cdot R}{2 \cdot E \cdot I} \cdot R = 0 \Rightarrow$$

$$M_{1} = \frac{PR}{2\pi} (2 - \pi)$$
(16.12)

Det er nu muligt at finde M_1 , når M_2 kendes, ved formel (16.13).

$$M_{1} = M_{2} - \frac{P}{2}R \Longrightarrow$$

$$M_{2} = \frac{P}{\pi}R$$
(16.13)

Til eftervisning af, at systemet er i ligevægt opstilles momentligevægt ved formel (16.14) om toppen. Momentet regnes positivt med uret.

$$0 = M_2 - M_1 - R_1 R \Longrightarrow$$

$$0 = \frac{P}{\pi} R + \frac{PR}{2\pi} (2 - \pi) - \frac{P}{2} R \Longrightarrow$$

$$0 = 0$$
(16.14)

Systemet er dermed i ligevægt.

16.3 Flytninger ved kombination af VKP og bjælketeori

I det følgende afsnit ønskes det at bygge videre på principperne for VKP, idet disse nu kombineres med teorien for krumme bjælker beskrevet i bilag B. Der opstilles analytiske udtryk for flytningen af cirkelringen ud fra bjælketeorien, hvor flytningerne henholdsvis baseres på Bernoulli-Euler og Timoshenko bjælketeori. Hver af de to teorier opstilles som et system af lineære første ordens differentialligninger, som efterfølgende løses, hvorved de korrekte flytningsmodeller haves for hver teori. Teorien for løsning af lineære første ordens differentialligninger er hentet fra [Zill, 2001].

16.3.1 Bernoulli-Euler bjælketeori

Først betragtes udbøjningsmodellerne for aksial- og tværflytningen baseret på Bernoulli-Euler bjælketeori. Fra bilag B hentes tøjningsmålene, jf. formel (16.15), (16.16) og (16.17).

$$\varepsilon(\theta) = \frac{1}{R} \frac{du}{d\theta} - \frac{1}{R}v \tag{16.15}$$

$$\omega(\theta) = \frac{1}{R} \frac{dv}{d\theta} + \frac{1}{R}u \tag{16.16}$$

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{R} \frac{d\omega}{d\theta}$$
(16.17)

Det ønskes efterfølgende at bestemme vinkeldrejningen som funktion af krumningen, da denne er uafhængig af henholdsvis aksial- og tværflytningen. I bilag B er de korrekte snitkræfter som funktion af vinklen bestemt ved formel (16.18), (16.19) og (16.20). Det bemærkes, at formlen for momentet har modsat fortegn end det tidligere grundet fortegnskonvektion for vinkeldrejningen, jf. formel (16.16) og figur 16.5.

$$N = -\frac{1}{2}P\cos(\theta) \tag{16.18}$$

$$V = \frac{1}{2}P\cos(\theta) \tag{16.19}$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{PR(-2 + \pi \cos(\theta))}{\pi}$$
(16.20)



Figur 16.5: Udsnit af cirkelring, hvor fortegnsretningen flytninger er angivet.

Derefter bestemmes vinkeldrejningen givet i formel (16.21), ved kombination af formel (16.17), (16.9) og (16.20).

$$\omega(\theta) = \int \kappa R d\theta$$

= $-\frac{PR^2}{2\pi EI} \int (2 - \pi \cos(\theta)) d\theta$ (16.21)
= $-\frac{PR^2}{2\pi EI} (2\theta - \pi \sin(\theta)) d\theta + Z$

Konstanten, *Z*, bestemmes ved, at indsætte randbetingelserne for systemets vinkeldrejninger. Da det vides, at vinkeldrejningen ved vinklen $\theta \log \pi/2$ er 0, findes konstanten til 0.

Efterfølgende vælges det at skrive det tilbageværende ligningssystem, det vil sige tøjningsmålene, op på matriceform. Dette klarlægges ved at betragte formel (16.15) og (16.16), jf. formel (16.22).

$$\begin{cases} \frac{du}{d\theta} = v + \varepsilon(\theta)R \\ \frac{dv}{d\theta} = -u + \omega(\theta)R \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \begin{cases} \frac{du}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon(\theta)R \\ \omega(\theta)R \end{bmatrix}$$
(16.22)

Ligningssystemet i formel (16.22) er en lineær første ordens differentialligning, som kan opskrives som formel (16.23).

$$\{x'(\theta)\} = [A]\{x(\theta)\} + \{F(\theta)\}$$
(16.23)

Ud fra formel (16.23) kan formel (16.24) defineres.

$$\{x'(\theta)\} = \begin{cases} u'(\theta) \\ v'(\theta) \end{cases}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{x(\theta)\} = \begin{cases} u(\theta) \\ v(\theta) \end{cases}$$

$$\{F(\theta)\} = \begin{cases} \varepsilon(\theta)R \\ \omega(\theta)R \end{cases} = \begin{cases} -\frac{PR}{2EA}\cos(\theta) \\ -\frac{PR^{3}}{2\pi EI}(2\theta - \pi \sin(\theta))d\theta \end{cases}$$

$$(16.24)$$

Ligningssystemet i formel (16.23) ønskes dernæst løst. Til systemet bestemmes en homogen og en partikulær løsning, hvor der som det første findes den homogene del, jf. formel (16.25).

$$[A]\{x(\theta)\} = \{x'(\theta)\}$$
(16.25)

Ved at omskrive formel (16.25) kan løsningen findes ved formel (16.26).

$$([A]-[I]\lambda)[K] = [0]$$
(16.26)

Efterfølgende tages determinanten af formel (16.26), hvorved egenværdierne kan bestemmes ved den karakteristiske ligning, jf. formel (16.27).

$$det ([A] - [I]\lambda) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda^{2} + 1 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{c} i \\ -i \end{array} \right\}$$

$$(16.27)$$

Det er nu muligt at bestemme konstanterne k_{12} og k_{22} ud fra de fundne komplekse egenværdier, jf. (16.28) og (16.29), hvor k_{11} og k_{21} er sat lig én for at løse systemet. Derved kan vektorerne K_1 og K_2 estimeres.

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ k_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow k_{12} = i \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix}$$
(16.28)

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ k_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow k_{22} = -i \Rightarrow \llbracket \mathbf{K}_2 \rrbracket = \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix}$$
(16.29)

Da egenværdierne er komplekse, bestemmes ud fra ovenstående løsning det sæt af konstanter, der benyttes til at opskrive løsningen til den homogene ligning, jf. formel (16.30).

$$\{B_1\} = \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 1\\0 \end{cases}$$

$$\{B_2\} = \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 0\\1 \end{cases}$$
(16.30)

Løsningen til den homogene ligning, den komplementære ligning, kan opskrives på formen givet ved formel (16.31).

$$\left\{x_{c}\left(\theta\right)\right\} = \left\{x_{1}\left(\theta\right)\right\} + \left\{x_{2}\left(\theta\right)\right\}$$
(16.31)

$$x_{1}(\theta) = c_{1} \lfloor \{B_{1}\} \cos(\beta\theta) - \{B_{2}\} \sin(\beta\theta) \rfloor e^{\alpha t}$$
$$x_{2}(\theta) = c_{2} [\{B_{2}\} \cos(\beta\theta) + \{B_{1}\} \sin(\beta\theta)] e^{\alpha t}$$

hvor

 α er værdien af det reelle tal af egenværdien

 β er værdien af det imaginære tal af egenværdien

Den komplementære ligning er endelig givet ved formel (16.32).

$$\{x_{c}(\theta)\} = c_{1}\left\{\begin{cases}1\\0\end{cases}\cos(\theta) - \begin{cases}0\\1\end{bmatrix}\sin(\theta)\right\} + c_{2}\left\{\begin{cases}0\\1\end{bmatrix}\cos(\theta) + \begin{cases}1\\0\end{bmatrix}\sin(\theta)\right\}$$

$$= c_{1}\left\{\cos(\theta)\\-\sin(\theta)\right\} + c_{2}\left\{\sin(\theta)\\\cos(\theta)\right\} = \left\{c_{1}\cos(\theta) + c_{2}\sin(\theta)\\-c_{1}\sin(\theta) + c_{2}\cos(\theta)\right\}$$

$$(16.32)$$

Inden det er muligt at estimere konstanterne c_1 og c_2 ved hjælp af randbetingelserne, skal løsningen findes til den partikulære del, hvilket gøres ved formel (16.33).

$$\left\{x_{p}\left(\theta\right)\right\} = \left[\boldsymbol{\varphi}\left(\theta\right)\right] \int \left[\boldsymbol{\varphi}^{-1}\left(\theta\right)\right] \left\{F\left(\theta\right)\right\} d\theta$$
(16.33)

hvor

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(\theta) & X_2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Det er nu muligt at finde løsningen til formel (16.33), da samtlige størrelser er kendte, cdbilag, hvorefter den fuldstændige løsning opskrives ved formel (16.34).

$$\left\{x(\theta)\right\} = \left\{x_{c}(\theta)\right\} + \left\{x_{p}(\theta)\right\}$$
(16.34)

Efterfølgende indsættes randbetingelserne for modellen givet ved henholdsvis formel (16.35) og (16.36).

$$u(0) = \overline{x}(0) = 0 \tag{16.35}$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \overline{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{16.36}$$

Derved er det muligt at opskrive den endelige løsning for aksial- og tværflytningen som funktion af vinklen, hvilken er givet ved formel (16.37).

$$u(\theta) = \frac{PR^{3}sin(\theta)}{2EI} - \frac{PR\theta\left(\pi EIcos(\theta) + R^{2}EA\pi cos(\theta) + 4R^{2}EA\right)}{4EA\pi EI}$$

$$v(\theta) = \frac{PR^{3}sin(\theta)}{2EI} + \frac{PR\left(\pi EIcos(\theta) + EI\theta\pi sin(\theta) - 4R^{2}EA - R^{2}EA\pi cos(\theta) + R^{2}EA\pi\theta sin(\theta)\right)}{4EA\pi EI}$$
(16.37)

hvor

Р	er lasten, 30 kN
R	er radius i bjælken, 51,5 mm
G	er forskydningsmodul, $\frac{E}{2(1+v)}$
Ι	er inertimoment, $\frac{1}{12} \cdot 20 \text{ mm} \cdot (55 \text{ mm})^3$
A	er arealet af tværsnit, 20 mm · 55 mm
Ε	er elastisitetsmodulen, 78600 MPa
A_k	er forskydningskorrektionsfaktor, $\frac{2}{3}A$

Indsættes samtlige materialeparametre for cirkelringen findes figur 16.6, hvor udbøjningen er vist både for Bernoulli-Euler-bjælken og Timoshenko-bjælken.

16.3.2 Timoshenko bjælketeori

Udledningsproceduren for udbøjningsmodellerne for aksial- og tværflytningen baseret på Timoshenko bjælketeori er analogt med Bernoulli-Euler. Det der ændres er brugen af tværtøjningen, jf. formel (16.38).

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{R} \frac{dv}{d\theta} + \frac{1}{R} u - \omega \tag{16.38}$$

Udledningsproceduren er herfra analog med det tidligere, idet vinkeldrejningen som funktion af krumningen som det første estimeres, hvorefter ligningssystemet af lineære første ordens differentialligninger løses. Løsningen ønskes til problemet givet ved (16.39).

$$\left\{ x'(\theta) \right\} = \begin{cases} u'(\theta) \\ v'(\theta) \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u(\theta) \\ v(\theta) \end{cases} + \begin{cases} R\varepsilon(\theta) \\ R(\gamma(\theta) + \omega(\theta)) \end{cases}$$
(16.39)

hvor

$$F(\theta) = \begin{cases} R\varepsilon(\theta) \\ R(\gamma(\theta) + \omega(\theta)) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{PR^4}{2\pi EA} \cos(\theta) \\ \frac{RP}{2GA_e} \sin(\theta) - \frac{PR^4}{2\pi EI} (2\theta - \pi \sin(\theta)) \end{cases}$$

Løses systemet (16.39) findes aksial- og tværflytningen som funktion af vinklen ved (16.40).

$$u(\theta) = \frac{PR^{3}sin(\theta)}{2EI} - \frac{PR\theta(GA_{e}\pi EIcos(\theta) + EA\pi EIcos(\theta))}{4GA_{e}EA\pi EI} + \frac{PR\theta(GA_{e}\pi R^{2}EAcos(\theta) + 4EAR^{2}GA_{e})}{4GA_{e}EA\pi EI}$$

$$v(\theta) = \frac{PR^{3}sin(\theta)}{2EI} + (16.40) + \frac{PR(GA_{e}\pi EIcos(\theta) + GA_{e}EI\theta\pi sin(\theta) - EA\pi EIcos(\theta) + EA\theta\pi EIsin(\theta))}{4EA\pi EI} + \frac{PR(-4GA_{e}R^{2}EA - R^{2}EA\pi cos(\theta) - R^{2}EA\pi\theta AE_{e}\cos\theta + EAR^{2}GA_{e}\pi\theta sin(\theta))}{4EA\pi EI}$$



Indsættes samtlige materialeparametre for cirkelringen findes figur 16.6.

Figur 16.6: Udbøjning for cirkelringen ud fra bjælketeori. Udbøjningen er skaleret 400 gange.

I tabel 16.1 er flytningernes størrelse angivet i punkterne vist på figur 16.6.

Teori:	$v_1 \ [mm]$	v ₂ [mm]
Bernoulli-Euler	-0,008	0,021
Timoshenko	-0,026	0,049

 Tabel 16.1: Flytninger af Bernoulli-Euler og Timoshenkobjælker.

16.4 Flytninger ved de virtuelle kræfters princip

Flytningerne bestemt i afsnit 16.3, kontrolleres i det følgende for en aktuel flytning, v_2 , i toppen af cirkelringen, ud fra VKP, jf. figur 16.7.



Figur 16.7: Cirkelring påført en virtuel kraft og en aktuel flytning.

Til bestemmelse af flytninger i et givet punkt i en bjælke opskrives de virtuelle kræfters princip for en enkeltlast, jf. formel (16.41).

$$\delta \frac{P}{2} \cdot u = \int_{0}^{s} \varepsilon(s) \delta N(s) ds + \int_{0}^{s} \kappa(s) \delta M(s) ds + \int_{0}^{s} \gamma(s) \delta V(s) ds$$
(16.41)

Da der i første omgang regnes på en Bernoulli-Euler bjælke, sættes forskydningsdeformationen til nul, og integralet opskrives, jf. (16.42).

$$\delta \frac{P}{2} u = \int_{0}^{s} \varepsilon(s) \delta N(s) ds + \int_{0}^{s} \kappa(s) \delta M(s) ds$$
(16.42)

Integralet omskrives så funktionen varierer i forhold til vinklen, jf. (16.43).

$$\delta \frac{P}{2}u = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon(\theta) \delta N(\theta) R d\theta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \kappa(\theta) \delta M(\theta) R d\theta$$
(16.43)

Den virtuelle normalkraft og det virtuelle moment opskrives af ligevægtsligningerne, jf. afsnit 16.2, hvor *P* sættes lig den virtuelle kraft $\delta P/2$.

$$\delta N(\theta) = -\delta \frac{P}{2} \cos(\theta)$$

$$\delta M(\theta) = \delta M_1 + \delta \frac{P}{2} R(1 - \cos(\theta))$$
(16.44)

hvor

$$\delta M_1 = \delta \frac{P}{2} \frac{R}{\pi} (2 - \pi)$$

Tøjningsmålene $\varepsilon(\theta)$ og $\kappa(\theta)$ er fundet ved de konstitutive ligninger (16.11).

Integralet (16.43) kan opskrives ved.

$$\begin{split} \delta \frac{P}{2} v_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(-\frac{P}{2} \cos\left(\theta\right)\right)}{EA} \cdot \left(-\delta \frac{P}{2} \cos\left(\theta\right)\right) R \cdot d\theta + \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{PR}{2\pi} (2-\pi) + \frac{P}{2} R \left(1-\cos\left(\theta\right)\right)\right)}{EI} \cdot \left(\delta \frac{P}{2} \frac{R}{\pi} (2-\pi) + \delta \frac{P}{2} R \left(1-\cos\left(\theta\right)\right)\right) R \cdot d\theta \\ \downarrow \\ \psi \\ v_2 &= \frac{PR (-\pi^2 - 8IR^2A + R^2A\pi^2I)}{8AE\pi} \end{split}$$

For en Timoshenkobjælke medtages blot forskydningsdeformationen.

$$v_{2} = -\frac{PR(-\pi^{2}GA_{k} - 8IR^{2}AGA_{k} + R^{2}AGA_{k}\pi^{2}I - \pi^{2}AE)}{8\pi AEGA_{k}}$$
(16.45)

Ved anvendelse af materialeparametrene er flytningen v_2 i toppen af cirkelringen beregnet, jf. formel (16.45), hvor størrelsen er for den kvarte cirkelring. Flytningen ses i tabel 16.2 sammen med resultaterne fra afsnit 16.3.

	VKP + bjælketeori	VKP
Bernoulli-Euler	0,021	0,021
Timoshenko	0,049	0,049

Tabel 16.2: Flytninger i toppen af cirkelringen.

Det kan herved konkluderes, at flytningerne stemmer overens med de beregnede resultater i afsnit 16.3.

Kapitel 17 Ritz metoden for massiv cirkelring

I dette kapitel anvendes Ritz-metoden til beregning af den potentielle energi ved hjælp af et analytisk udtryk for flytningerne af legemet. Teorien omkring Ritz-metoden er behandlet i kapitel 11.

Udtrykket for den potentielle energi omskrives i det følgende til at gå fra den indre radius til den ydre, jf. (17.1), hvor den indre radius indgår som R_{indre} .

$$\Pi_{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1 - v^{2}} \right) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_{indre}}^{R_{ydre}} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\}^{T} \left[\boldsymbol{D} \right] \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\} r \cdot dr \cdot d\theta - \frac{1}{2} P u_{y} \left(\frac{\pi}{2}, R \right)$$
(17.1)

Indre og ydre radier er defineret, jf. figur 17.1.



Figur 17.1: Cirkelring med definering af indre og ydre radius.

I det følgende gættes på flytningsfelter, der enten er polynomier givet ved (17.2) og (17.3) eller trigonometriske funktioner givet ved (17.4) og (17.5). Disse funktioner er valgt, da de er mulige at integrere over den kvarte cirkelring.

$$u_{x}(x, y) = a_{0} + a_{1} \cdot x + a_{2} \cdot y + a_{3} \cdot x^{2} + a_{4} \cdot y^{2} \cdots$$
(17.2)

$$u_{y}(x, y) = b_{0} + b_{1} \cdot x + b_{2} \cdot y + b_{3} \cdot x^{2} + b_{4} \cdot y^{2} \cdots$$
(17.3)

$$u_x(x,y) = b_1 \cdot \cos^n(v) \tag{17.4}$$

$$u_{y}(x,y) = b_{2} \cdot \sin^{m}(v) \tag{17.5}$$

Randbetingelserne er defineret ved, at flytningsfeltet ikke må slippe akserne. Dertil kommer, at flytningsfeltet for linielasten ikke må have et knæk, hvor dette skærer y-aksen. Betingelsen med knækket er ikke gældende for punktlasten, idet de numeriske modeller antyder, at der opstår et knæk.

17.1 Resultater

Udvalgte gæt på funktionerne $u_x(x,y)$ og $u_y(x,y)$ er angivet i tabel 17.1.

Gæt:	$u_{x}(x,y)$	$u_{\gamma}(x,y)$	Πp
1	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6$	-93,7
2	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin(v)$	-82,7
3	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin^2(v)$	-98,3
4	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin^3(v)$	-93,4
5	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin^4(v)$	-84,9
6	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 \cdot x + b_4 \cdot y^8$	-161,5
7	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3 + a_3 \cdot x^5$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10} \cdot x^2 + b_6 \cdot y^{12} \cdot x$	-153,1

 Tabel 17.1: Potentiel energi for flytningsfelterne.

Forud for resultaterne i tabel 17.1 er der foretaget en analyse af konsekvensen af gæt på lige og ulige potenser, sammensatte funktioner af forskellig orden samt potenser af de trigonometriske funktioner. Det fremgår af gæt 4, at højere ordens gæt i sinusleddet giver dårligere resultater.

Udbøjningerne er skitseret på figur 17.2, hvor nogle af gættene er undladt, da de stort set er sammenfaldende.



Figur 17.2: Udbøjning skaleret 1000 gange.

Gæt 6 og 7, med mindst potentielle energi, har en diskontinuitet, hvor punktlasten angriber. Denne diskontinuitet opstår fordi flytningsfeltet i kraftens retning indeholder et x-led. Den potentielle energi for gæt 6 og 7 kan anvendes til sammenligningen med de numeriske metoder, hvis disse er påvirket af en punktlast. Resultatet af, at energien i et flytningsfelt med et knæk er væsentligt større end et felt uden kan antyde, at resultaterne uden knæk ikke kan anvendes til sammenligning med de numeriske metoder med punktlaster. Til sammenligning med de øvrige modeller er udbøjningen bestemt, jf. tabel 17.2.

Gæt:	u _x (48,0)	u _y (0,48)
1	0,0000	-0,0054
2	0,0030	-0,0110
3	0,0048	-0,0130
4	0,0051	-0,0125
5	0,0049	-0,0116
6	0,0027	-0,0064
7	0,0026	-0,0061

 Tabel 17.2: Udbøjningen i to udvalgte punkter.

Kapitel 18 Ritz metoden for porøs cirkelring

Teorien for Ritz-metoden er gennemgået i kapitel 17. Derfor følger der kun resultaterne for den porøse cirkelring i det følgende afsnit

18.1 Resultater

Udvalgte gæt på funktionerne $u_x(x,y)$ og $u_y(x,y)$ er angivet i tabel 18.1.

Gæt:	$u_{x}(x,y)$	$u_v(x,y)$	Π_{p}
1	0	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6$	-150,1
2	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin(v)$	-130,6
3	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin^2(v)$	-140,7
4	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin^3(v)$	-151,4
5	$b_1 \cdot cos(v)$	$b_2 \cdot sin^4(v)$	-140,7
6	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 \cdot x + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8$	-264,4
7	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3 + a_3 \cdot x^5$	$b_1 \cdot y^2 + b_2 \cdot y^4 + b_3 \cdot y^6 + b_4 \cdot y^8 + b_5 \cdot y^{10} \cdot x^2 + b_6 \cdot y^{12} \cdot x$	-250,8

 Tabel 18.1: Potentiel energi for flytningsfelterne.

Forud for resultaterne i tabel 18.1 er der foretaget en analyse af konsekvensen af gæt på lige og ulige potenser, sammensatte funktioner af forskellig orden samt potenser af de trigonometriske funktioner.

Udbøjningerne er skitseret på figur 18.1, hvor nogle af gættene er undladt, da de stort set er sammenfaldende.



Figur 18.1: Udbøjning skaleret 1000 gange.

Det viser sig at konklusionerne fra den massive cirkelskive ligeledes gør sig gældende for den porøse cirkelskive, da det eneste der er ændret er elasticitetsmodulen. Til sammenligning med de øvrige modeller er udbøjningen bestemt, jf. tabel 18.2.

Gæt:	u _x (48,0)	u _v (0,48)
1	0,0000	-0,0087
2	0,0048	-0,0170
3	0,0078	-0,0210
4	0,0083	-0,0202
5	0,0080	-0,0190
6	0,0048	-0,0110
7	0,0047	-0,0100

Tabel 18.2: Udbøjningen i to udvalgte punkter.
Kapitel 19 Numeriske modeller af cirkelring

I dette afsnit opstilles numeriske modeller for cirkelringen, hvorfra der bestemmes spændinger og flytninger, som sammenlignes for de forskellige modeller. De modeller, der anvendes er:

- Model BEr bestående af rette Bernoulli-Euler bjælkeelementer.
- Model Tr bestående af rette Timoshenko bjælkeelementer.
- Model Q4r bestående af isoparametriske firkantselementer med fire knuder, hvor flytningerne af siderne mellem knuderne beskrives ved førstegradspolynomier.
- Model Q8r bestående af isoparametriske firkantselementer med otte knuder, hvor flytningerne af siderne mellem knuderne beskrives ved andengradspolynomier.
- Model SHEr består af spændingshybride Q4 elementer.

I bjælkemodellerne er der tre frihedsgrader i hver knude, mens der i skivemodellerne er to frihedsgrader i hver knude. Desuden er alle modeller parametriseret så der kan ændres på lasten, P, ydre radius, R, indre radius, r, elasticitetsmodul, E, Poissons forhold, v, samt antallet af elementer i radiær retning, bortset fra bjælkemodellerne, hvor det er antallet af elementer i tangentiel retning, der kan ændres. Alle modeller findes som cd-bilag.

19.1 Opbygning af model BEr

Model BEr er opbygget af rette Bernoulli-Euler bjælkeelementer. På figur 19.1 er den kvarte cirkelring vist med globale knudenumre og elementnumre for en opbygning med fire elementer. Ved opbygningen af modellen placeres knuderne i centerlinien af cirkelringen, og bjælkernes højde sættes til cirkelringens bredde.



Figur 19.1: Princip for elementopbygning og globale knudenumre for model BEr.

Ved beregningen af Bernoulli-Euler bjælker forudsættes, at plane tværsnit forbliver plane og vinkelrette på bjælkeaksen, hvilket betyder, at der i samlingen mellem elementerne vil forekomme en overlapning. Denne fejl kan minimeres ved at vælge tilstrækkeligt mange elementer. Teorien for Bernoulli-Euler bjælker er ikke gældende for høje bjælker, idet der ikke regnes med forskydningsdeformationer. Dette medfører endnu en fejl ved anvendelsen af modellen, idet bjælken må anses for værende høj i forhold til længden.

19.2 Opbygning af model Tr

Model Tr er opbygget af rette Timoshenko bjælker. Selve opbygningen og nummereringen af knuder og elementer er den samme som for Bernoulli-Euler modellen jf. afsnit 19.1. I denne model opstår samme fejl ved antagelsen om at plane tværsnit forbliver plane, men i modsætning til Bernoulli-Euler teorien medtages forskydningsdeformationerne. Opbygningen med rette Timoshenko bjælker anses, som udgangspunkt, som en bedre model.

19.3 Opbygning af model Q4r

Model Q4r er opbygget af isoparametriske firkantselementer med fire knuder. Den principielle opbygning er vist i figur 19.2 for en opbygning af den kvarte cirkelring med få elementer, hvor de globale knudenumre er angivet. Desuden er den principielle nummerering af elementerne vist. Elementdimensionerne er konstante både i radiær og tangentiel retning for alle elementer og der er dobbelt så mange elementer i tangentiel retning som i radiær retning.



Figur 19.2: Princip for elementopbygning og globale knudenumre for model Q4r.

Der anvendes fire Gauss-punkter ved bestemmelse af flytninger og spændinger. Ved bestemmelse af spændingerne beregnes disse i knuderne, hvorved der opnås en jævn afbildning af spændingerne.

For denne model gælder samme betragtning omkring aflange elementer som for model Q4s, jf. afsnit 13.1.

19.4 Opbygning af model Q8r

Model Q8r er opbygget af isoparametriske firkantselementer med otte knuder. Den principielle opbygning er vist i figur 19.3 for en opbygning af den kvarte cirkelring med 8 elementer, hvor de globale knudenumre er angivet. Desuden er den principielle nummerering af elementerne vist. Elementdimensionerne er konstante både i radiær og tangentiel retning for alle elementer og der er dobbelt så mange elementer i tangentiel retning som i radiær retning.



Figur 19.3: Princip for elementopbygning og globale knudenumre for model Q8r.

For firkanterne anvendes ni Gauss-punkter ved bestemmelse af flytninger og spændinger. Ved bestemmelse af spændingerne beregnes disse i knudepunkterne, hvorved der opnås en jævn afbildning af spændingerne.

For denne model gælder samme betragtning omkring rektanglernes længde som for model Q4s, jf. afsnit 13.1.

19.5 Opbygning af model SHEr

Model SHEr er opbygges tilsvarende model Q4r. Eneste forskel er elementtypen.

19.6 Konvergensstudie af cirkelring

Der foretages et konvergensstudie på flytninger, hvilket gøres ved at estimere eksakte værdier af disse størrelser ud fra værdier fra tre forskellige antal benyttede elementinddelinger. Metoden er beskrevet i afsnit 6.5.

19.6.1 Konvergens af bjælkemodeller

For begge bjælkemodeller vælges det at lade elementlængden være givet ved (19.1).

$$h = \frac{R\,\pi}{2N}\tag{19.1}$$

hvor

R er radien af centerlinien

N er antallet af elementer

Der vælges et forhold mellem elementlængderne i de forskellige modeller på m=2, som opnås ved at fordoble antallet af elementer. Det vælges at estimere flytningerne i punktet (x, y) = (0, R) for en belastning på den kvarte cirkelskive på 15kN. Først betragtes FEM modellen af Bernoulli-Euler bjælker, jf. tabel 19.1.

Antal	Antal	Elementlængde	Flytning	Beregningstid
elementer	frihedsgrader		$u_y[mm]$	[s]
100	303	0,404	-0,000304	0,7
200	603	0,202	-0,000152	3
400	1203	0,101	-0,000076	17,5
800	2403	0,051	-0,000038	137,5

Tabel 19.1: Værdier til estimering af eksakte værdier.

Ud fra tabel 19.1, der viser en del af beregningsresultaterne, kan det konkluderes, at det ikke er fordelagtigt at lave et grundlæggende konvergensstudie af FEM modellen, da flytningen konvergerer mod nul ved valg af et stort antal elementer, jf. figur 19.4.



Figur 19.4: Konvergens af flytninger for FEM model for Bernoulli-Euler bjælketeori.

Ud fra beregningsresultaterne må det antages, at modellen bliver stivere jo flere elementer, der benyttes til at modellere cirkelringen. Dette skyldes sandsynligvis, at det er rette bjælkeelementer, der benyttes. Det vurderes på baggrund af ovenstående, at FEM modellen ikke er brugbar til at modellere de virkelige flytninger.

Herefter betragtes FEM modellen af Timoshenko bjælker.

Antal elementer	Antal frihedsgrader	Elementlængde	Flytning $u_x[\mu m]$	Beregningstid [s]
100	303	0,404	-0,000304	0,7
200	603	0,202	-0,000152	3
400	1203	0,101	-0,000076	18
800	2403	0,051	-0,000038	126,5

 Tabel 19.2: Værdier til estimering af eksakte værdier.

Ud fra tabel 19.2, der viser en del af beregningsresultaterne, kan det også her konkluderes, at flytningen konvergerer mod nul ved valg af store antal elementer, jf. figur 19.5.



Figur 19.5: Konvergens af flytninger for FEM model for Timoshenko bjælketeori.

Beregningsresultaterne viser som tidligere, at modellen bliver stivere jo flere elementer, der benyttes til at modellere cirkelringen. Derved er FEM modellen for cirkelringen ved brug af Timoshenko bjælketeori ligeledes ikke er brugbar til at modellere de virkelige flytninger.

19.7 Resultater for massiv cirkelring

I dette afsnit bestemmes flytninger og spændinger i den kvarte cirkelring i punkterne vist på figur 19.6, svarende til de steder, der måles i forsøget. Dette gøres for alle FEMmodellerne af ringen, idet elasticitetsmodul og Poissons forhold fra kapitel 8benyttes. Ligeledes bestemmes den potentielle energi i den kvarte cirkelring. Belastningen, som disse parametre findes for, er 15 kN på den kvarte cirkelring.



Figur 19.6: Placering af punkter, hvor flytninger bestemmes.

I tabel 19.3 ses resultaterne for de to cirkelringmodeller, hvor der er valgt tilstrækkelig mange elementer til at fejlen er minimal, jf. afsnit 13.5. Det ses at størrelsen af flytningerne ikke ændres meget fra model til model. Til sammenligning med de analytiske metoder og forsøgene anvendes resultatet fra Q8r-modellen.

FEM-model	u_x [mm]	<i>u_y</i> [mm]	Π_{P} [Nmm]
Q4r	0,0171106	-0,0301776	-711,8
Q8r	0,0171125	-0,0301801	-709,3
SHEr	0,0171100	-0,0301791	-

Tabel 19.3: Resultater fra massiv cirkelring.

På figur 19.7 er vist spændingsplot i de to normalspændingsretninger samt forskydningsspænding.



Figur 19.7: Spændingsvariationer for den massive cirkelring.

19.8 Resultater for porøs cirkelring

I dette afsnit bestemmes flytninger i den kvarte cirkelring i punkterne vist på figur 19.8, svarende til de steder, der måles i forsøget. Dette gøres for alle FEM-modellerne af ringen, idet den konstitutive matrice fra kapitel 8 benyttes. Ligeledes bestemmes den potentielle energi i den kvarte cirkelring. Belastningen, som disse parametre findes for, er 15 kN på den kvarte cirkelring.



Figur 19.8: Placering af punkt, hvor flytninger bestemmes.

I tabel 19.4 ses resultaterne for de to cirkelringmodeller, hvor der er valgt tilstrækkelig mange elementer til at fejlen er minimal, jf. kapitel 13.5. Det ses, at størrelsen af flytningerne ikke ændres meget fra model til model. Til sammenligning med de analytiske metoder og forsøgene anvendes resultatet fra Q8r-modellen.

FEM-model	$u_x [mm]$	u_y [mm]	Π_P [Nmm]
Q4r	0,0275250	-0,0439155	-1042,7
Q8r	0,0275277	-0,0439190	-1034,1
SHEr	0,0292041	-0,0440662	-

 Tabel 19.4: Resultater fra porøs cirkelring.

Spændingsvariationerne i den massive og porøse cirkelring er identiske, idet spændingsvariationen ikke afhænger af materialekonstanterne, jf. afsnit 13.6 og 13.7. På baggrund af dette henvises til figur 19.7 for spændingsplot.

Kapitel 20 Forsøgsresultater for cirkelring

Til verificering af de numeriske og analytiske beregninger er der for cirkelringen udført forsøg, hvor forsøgsopstillingen er vist på figur 20.1.



Figur 20.1: Massiv cirkelring med flytningsmålere.

Belastningen på både den massive og porøse cirkelskive påføres af to omgange med belastningerne henholdsvis 0 til 15 kN og 0 til 30 kN. Forsøgselementet udstyres med to flytningsmålere på hver side, hvorved det er muligt bestemme flytningen i henholdsvis vandret og lodret retning, forsøg 6, hvilke bestemmes ved formel (20.1) og (20.2).

$$P = 447 \cdot u_L \tag{20.1}$$

$$P = 801 \cdot u_V \tag{20.2}$$

Flytningerne ved en belastning på 30 kN bestemmes jf. formel (20.1) og (20.2).

$$u_L = \frac{30}{447} = 0,07 \text{ mm}$$

 $u_V = \frac{30}{801} = 0,04 \text{ mm}$



For den porøse cirkelring fremgår forsøgsopstillingen af figur 20.2.

Figur 20.2: Porøs cirkelring med flytningsmåler.

Databehandlingen er foretaget analogt til den massive cirkelring, hvorved flytningerne i lodret og vandret retning bestemmes ved henholdsvis formel (20.3) og (20.4). For nærmere oplysninger om forsøgsopstilling og resultater henvises til forsøg 7.

$$P = 238 \cdot u_L \tag{20.3}$$

$$P = 410 \cdot u_V \tag{20.4}$$

Flytningerne ved en belastning på 30 kN bestemmes jf. formel (20.3) og (20.4).

$$u_L = \frac{30}{238} = 0,13 \text{ mm}$$

 $u_V = \frac{30}{410} = 0,07 \text{ mm}$

Kapitel 21 Sammenligning af resultater

I dette kapitel sammenlignes de analytiske udtryk, numeriske modeller og måleresultater fra laboratorieforsøg for cirkelringen.

Fra Bernoulli-Euler- og Timoshenko-bjælketeorien samt laboratorieforsøg fremkommer et udtryk for deformationen, hvor de numeriske modeller og Ritzmetoden fremkommer med både en deformation og en værdi for den potentielle energi. På baggrund af disse resultater foretages sammenligningen.

21.1Sammenligning af flytninger

Ved laboratorieforsøg er flytninger målt i punkterne angivet på figur 21.1, hvorfor disse benyttes som referencepunkter for sammenligningen. Dette gør sig gældende for både den massive og porøse cirkelring.



Figur 21.1: Angivelse af punkter hvor deformeringen bestemmes.

I tabel 21.1 er flytningen og den potentielle energi opskrevet for de forskellige metoder og på figur 21.2 er udbøjningen optegnet.

Flement			Massiv					I	Porøs		
Metode	u_x [mm	$] u_y$	[mm]	Π_P	[Nmm]	u_x	[mm]	u_y	[mm]	Π_P	[Nmm]
B-E (ana.)	0,0	5	-		-		-		-		-
Timosh. (ana.)	0,0	2	-		-		-		-		-
Ritz gæt 3	0,00	5	-0,01		-98,3		0,008		-0,02		-140,7
Num. (Q8)	0,0	2	-0,03		-711,8		0,03		-0,04		-1042,7
Forsøg	0,0	7	-0,04		_		0,13		-0,07		-

Tabel 21.1: Flytninger og potentiel energi for udvalgte metoder



Figur 21.2: Udbøjning skaleret 400 gange.

Det må forventes, at den målte udbøjning er den rigtige, trods cirkelringen i forsøget er påvirket af en last virkende over et lille areal, hvorimod de beregnede modeller tager udgangspunkt i en punktlast. Dette kan også være forklaringen på, at det er Bernoulli-Euler teorien der, frem for den numeriske model, kommer nærmest den vertikale flytning, hvilket må siges at være overraskende, da Bernoulli-Euler teorien er den simpleste af metoderne. Det viser sig imidlertid også ved den vandrette flytning at den numeriske værdi er bedre end Bernulli-Euler, hvor Timoshenko viser sig bedst, jf. desuden figur 21.2. Den dårligste estimering af flytningen ses tydeligt, at være Ritzmetoden, hvilket ikke automatisk gør metoden dårlig, men indikerer, at polynomier og sinus- og cosinusfunktioner er dårlige gæt på deformationen. Ligeledes bemærkes, at den potentielle energi ved Ritzmetoden ligger langt fra den potentielle energi beregnet numerisk, hvilket kan skyldes en manglende udbøjning for Ritzmetoden, der medfører mindre potentiel energi.

Del V Konklusion

Kapitel 22 Konklusion

I rapporten er der lavet en analyse af en række aluminiumsskiver og enhedsceller. Analysen er foretaget ud fra en række analytiske udtryk, numeriske beregninger samt forsøg udført i fuldskala. I det følgende konkluderes der på de forskellige metoder og de dertilhørende resultater. Overordnet er der behandlet to forskellige materialer i form af massivt aluminium og et porøst materiale, der er udført i samme aluminium blot med en række huller, der imiterer en porøsitet. Samtidig er der i forbindelse med den påførte last foretaget en simplificering, idet der i forsøget er påført en linielast, mens der i de numeriske og analytiske beregninger er regnet med en punktlast.

I det følgende bestemmes de optimale metoder til løsning af henholdsvis flytninger og spændinger for skiverne og cirkelringen, mens den mest optimale metode til bestemmelse af materialeparametrene findes for enhedscellen. En optimal metode defineres som den metode, som er simpel og let at opstille, men stadig leverer et "godt" resultat.

22.1 Enhedscelle

Estimeringen af elasticitetsmodulen for det porøse materiale er foretaget ved anvendelse af analytiske og numeriske metoder. Analytisk benyttes Gibson Ashby, Voigt, Reuss, Dilute og den selvkonsistente metode. Voigt og Reuss giver øvre- og nedreværdiløsninger, hvoraf det kan konkluderes, at Dilute estimatet ikke kan anvendes ved porøsiteter over 0,66, mens den selvkonsistente metode ikke kan benyttes ved porøsiteter over 0,33. Til verificering af de analytiske estimater blev der foretaget forsøg, hvor sammenligning viser, at ingen af de analytiske estimater giver gode resultater. Imidlertid giver Dilute og Gibson Ashby de forholdsvis bedste estimater, specielt ved lavere porøsiteter. På baggrund af dette kan det konkluderes at Gibson Ashby er det bedste estimat da dette er simplere at opstille end Dilute estimatet. Ved sammenligning af Gibson Ashby og de numeriske resultater i forhold til eksperimentelle ligger estimaterne lige langt fra. På baggrund af dette konkluderes, at Gibson Ashby er den bedst metode, idet de numeriske beregninger er mere komplicerede. Det skal imidlertid bemærkes at Gibson Ashby ikke giver et estimat for Poissons forhold, hvilket ikke har været muligt at sammenligne med eksperimentelle resultater.

22.2 Cirkelskive

De analytiske udtryk for cirkelskiven er opstillet ved Ritz-metode, kompleks funktionsteori samt Fourier rækkeudvikling. I Ritz-metoden er der gættet på en række flytningsfelter i form af polynomier. Dette er en forholdsvis simpel metode, der relativt hurtigt kan opstilles. Flytningerne bestemt ved de bedste gæt er cirka halvdelen af de målte flytninger. Dertil kommer, at den potentielle energi bestemt ved Ritz-metoden er langt fra FEM beregningerne, hvorved det kan konkluderes, at Ritz-metoden ikke har nogen praktisk anvendelse ved gæt på polynomier. Det afvises ikke, at der kan forekomme andre analytiske udtryk af flytningerne, der kunne minimere fejlen.

Spændingerne beregnet med den komplekse funktionsteori og Fourier rækkeudviklingen bygger begge på Airy's spændingsfunktion. Forskellen er indførelsen af lasten i ligningerne. Ved sammenligning af de beregnede værdier af spændingerne for de to modeller ses, at forskellen er minimal. Dertil kommer, at en sammenligning med FEM beregningerne viser, at spændingerne beregnet med den komplekse funktionsteori og Fourier rækkeudviklingerne næsten er sammenfaldende. Derfor vurderes disse matematiske udtryk at være gode til beregning af spændingerne i cirkelskiven. Den nøjagtige udledning af ligningerne til Fourier og kompleks funktionsteori er ud over dette semesters indhold og det anbefales derfor at fravælge disse metoder.

Cirkelskiven blev modelleret med fire FEM-modeller, en bestående af firkantselementer med konstant tøjningsfordeling i elementet (Q4-model), en bestående af firkantselementer med lineært varierende tøjningsfordeling i elementet (Q8-model), en model bestående af trekantselementer med lineært varierende tøjningsfordeling i elementet (LST-model) samt en model bestående af spændingshybride Q4 elementer. De fire modeller konvergerer mod den samme værdi af flytninger og spændinger, når antallet af elementer øges, men det viser sig, at det spændingshybride element laver numeriske fejl, når modellen opbygges af over 4000 elementer. Samtidig viste det sig mod forventning, at det spændingshybride element konvergerede langsomt på spændingerne, og derved antages den bedste af modellerne at være LST-modellen, der konvergerer hurtigst af de tre modeller. FEM-modellerne er simple at anvende, men det kan være besværligt at opstille modeltopologien. Fordelen ved FEM-modellerne er, at når først topologien er opstillet, kan alle relevante resultater beregnes, såsom flytninger, spændinger, tøjninger samt potentiel energi.

22.3 Cirkelring

Ved antagelse om at cirkelringen er en bjælke, kan Bernoulli Euler bjælketeori samt Timoshenko bjælketeori anvendes til at opstille analytiske udtryk for flytningen af cirkelringen. Dernæst er Ritz-metoden anvendt som en analytisk løsning. Det viser sig, at Bernoulli Euler bjælketeori ved anvendelse af de generelle tøjningsrelationer giver en ret præcis værdi for flytningen. Dette er lidt imod det forventede, idet længde-breddeforholdet henvender sig bedre til Timoshenko bjælketeori. Flytningen beregnet ved Timoshenko bjælketeorien viser sig, at være større end flytninger ved alle andre modeller. Det vurderes derfor, at Bernoulli Euler bjælketeorien er en udmærket analytisk løsning til cirkelringen. Det bemærkes, at det kan være tilfældigt, at Bernoulli Euler flytningen er så god, idet bjælkens længde-breddeforhold som sagt ikke er inden for bjælketeoriens normale gyldighedsområde.

Ritz-metoden viser sig også her at have større fejl på flytningen samt den potentielle energi. Derfor kan det ligeledes konkluderes, at gæt på polynomier samt sinus og cosinus funktioner i forhold til Ritz-metoden ikke er en god løsning til problemstillingen.

Cirkelringen er modelleret med fem FEM-modeller, en bestående af firkantselementer med konstant tøjningsfordeling i elementet (Q4-model) og en bestående af firkantselementer

med lineært varierende tøjningsfordeling i elementet (Q8-model), en bestående af spændingshybridelementer (SHE-model) samt en Bernoulli Euler- og en Timoshenkobjælkemodel. De to bjælkemodeller modellerer cirkelringen meget stift når antallet af elementer øges. De tre øvrige modeller konvergerer mod den samme værdi af flytninger og spændinger, når antallet af elementer øges. Den bedste af modellerne er Q8-modellen, der konvergerer hurtigst.

Kapitel 23 Kildeliste

[Ayyub m.fl., 1997]

Probability, statistics, and reliability for engineers and scientists, 2. udgave, 1997, Bilal M. Ayyub og Richard H. McCuen. ISBN 1-58488-286-7

[Byskov, 2002a]

Elementary Continuum Mechanics for Everyone – and Some More, "I need it like I need another hole in my head", Volume 1, 2002, Esben Byskov. ISSN 1395-8232 U0207

[Byskov, 2002b]

Elementary Continuum Mechanics for Everyone – and Some More, "I need it like I need another hole in my head", Volume 2, 2002, Esben Byskov. ISSN 1395-8232 U0208

[Cook, 2002]

Concepts and applications of finite element analysis, 4. udgave, 2002, Robert D. Cook ... [et al.]. ISBN 0-471-35605-0

[Foley, 2004]

Noter til kurset Inledende Kontinuummekanik, 2004, Christina Foley. ISSN 1395-8232 U0304

[Kohl, 1930]

Berechnung von kreisrunden Scheiben unter der Wirkung von Einzelkräften in ihrer Ebene,1.Band, 1930, E. Kohl.

[Myhre, 2005]

Noter til kurset Kontinuummekanik – materialers mekaniske egenskaber, 2005, Henrik Myhre Jenen.

[Pilegaard, 1998]

Noter til Eksperimentelle Metoder, 2. udgave, 1998, Lars Pilegaard Hansen.

[Thoft-Christensen, 1973]

Elasticitetsteori og kompleks funktionsteori, 1973, P. Thoft-Christensen.

[Zill, 2001]

Differential Equations with Boundary-Value Problems, 5. udgave 2001, Dennis G. Zill [et al.]. ISBN 0-534-38002-6

Bilag

Bilag A Straingage teori

I dette bilag beskrives teorien for straingages og deres anvendelse til eksperimentel bestemmelse af materialeparametre. Bilaget er skrevet i henhold til [Pilegaard, 1998]. Anvendes anden kilde er dette anført.

A.1 Straingages

En straingage, jf. figur a.1, er et ledende materiale der, påsat på et legeme udsat for en deformation, deformeres med legemet. Registreringen af deformationen sker ved en forlængelse eller sammentrykning af straingagen, hvorved straingagens tværareal, længde og elektriske modstand ændres. Ændringen i modstanden kan måles og omregnes til en tøjning. På figur a.1 vises en principskitse af en enkeltgage og en rosettegage, tilsvarende dem der benyttes i forsøgene. Det noteres, at rosettegagen måler i ét punkt, men er her illustreret med de tre gages forskudt for at tydeliggøre skitsen.



Figur A.1: Principskitse af en Enkeltgage og en Rosettegage.

Påføres gagen en forlængelse vinkelret ind på måleretningen, sker der en lille forlængelse i tværretningen og derfor et bidrag til den samlede målte tøjning. Denne ses der bort fra, da den antages lille.

Der opskrives et udtryk for tøjningen i henhold til ændringen i modstanden. Først defineres modstanden, R, ved formel (A.1).

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{A.1}$$

hvor

ρ

er den specifikke modstand af materialet

A er tværsnitsarealet af materialet

L er længden af materialet

En ændring i modstanden kan tilnærmelsesvis opskrives ved formel (A.2).

$$\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial R}{\partial L} \Delta L + \frac{\partial R}{\partial A} \Delta A$$

$$= \frac{L}{A} \Delta \rho + \frac{\rho}{A} \Delta L - \rho L \frac{1}{A^2} \Delta A$$
(A.2)

Divideres der igennem med R fås formel (A.3).

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{\rho} \Delta \rho + \frac{1}{L} \Delta L - \frac{1}{A} \Delta A \tag{A.3}$$

I det følgende antages lederen at være en cirkulær tråd, hvorfor et udtryk for den deformerede diameter kan skrives som formel (A.4).

$$d_{def} = d\left(1 - \nu\Delta\varepsilon\right) \tag{A.4}$$

hvor

V	er Poissons forhold for ledningsmaterialet
d	er den udeformerede diameter
$\Delta \varepsilon$	er ændringen i længdetøjningen

Herfra kan formel (A.5) opskrives for arealændringen i forhold til det udeformerede areal.

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A_{def} - A}{A} = \frac{\pi d^2 \left(1 - \nu \Delta \varepsilon\right)^2 - \pi d^2}{\pi d^2}$$

$$= -2\nu \Delta \varepsilon + \nu^2 \left(\Delta \varepsilon\right)^2$$
(A.5)

Forudsættes små tøjninger bortkastes sidste led i formel (A.5), hvorved formel (A.6) kan opskrives.

$$\frac{\Delta A}{A} \simeq -2\nu\Delta\varepsilon \tag{A.6}$$

Med formel (A.6) kan (A.3) skrives som formel (A.7).

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + (1 - 2\nu)\Delta\varepsilon \tag{A.7}$$

Hvor første led på højresiden er strukturændringen og andet led på højresiden er tøjningen.

Herfra indføres gagefaktoren, K_g , således formel (A.7) skrives som formel (A.8)

$$\frac{\Delta R}{R} = K_g \Delta \varepsilon \tag{A.8}$$

hvor

$$K_g = \frac{\frac{\Delta\rho}{\rho}}{\Delta\varepsilon} + \left(1 + 2\nu\right)$$

Gagefaktoren kan bestemmes eksperimentelt, men opgives sædvanligvis af fabrikanten af straingagen.

Ovenstående udledning gør sig gældende for både enkeltgages og rosettegages, men hvor enkeltgages kun måler i en retning., måler rosettegages i tre retninger, idet rosettegages kan betragtes som sammensat af tre enkeltgages jf. figur a.2, hvorfor tværtøjningen kan bestemmes ved formel (A.9), [Foley, 2004].



Figur A.2: Rosettegage måleretninger.

$$\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{xx} \cos^2(\theta) + \varepsilon_{yy} \sin^2(\theta) + \varepsilon_{xy} \cos(2\theta)$$
(A.9)

hvor

 ε_{nn} er den målte tøjning for en given gage i Rosettegagen θ er gagens vinkel

Tværtøjningen kan herfra findes ved formel (A.10).

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{xx} \cos^2(\theta) - \varepsilon_{yy} \sin(\theta)}{\sin(2\theta)}$$
(A.10)

A.2 Wheatstone bro

Til registrering og måling af ændringer i straingagen benyttes en Wheatstone bro, jf. figur a.3. En Wheatstone bro er et kredsløb, der benyttes til måling af relative ændringer i modstande og er derfor velegnet til straingages.



Figur A.3: Skitse af Wheatstone bro.

Den pågældende Wheatstone bro virker ved at påsætte en bro-spænding, V_e , over punkterne 2 og 3. Herfra løber strømmen via 1 og 4 til output spændingen, V_0 . Mellem punkt 1,2,3 og 4 isættes modstande i form af eksempelvis straingages, hvorfor der kan registreres en spændingsforskel ved output spændingen i henhold til ændringen i modstanden, jf. afsnit A.1. Modstandene er repræsenteret ved R_{12} , R_{13} , R_{34} , og R_{24} på figur a.3. Modstanden fra punkt 1 til 4 antages så stor, at strømmen mellem punkt 1 og 4 forventes at være lig 0. Til bestemmelse af V_0 , findes først spændingsfaldet over strækningerne 1-2 og 2-4.

$$V_1 = V_2 - V_{12} \text{ og } V_4 = V_2 - V_{24}$$

 $\downarrow \downarrow$
 $V_0 = V_4 - V_1 = V_{12} - V_{24}$

Da strømmen i punkt. 1, 2 og 3 er konstant haves fra Ohms lov formel (A.11).

$$V_{12} = R_{12} \cdot I \tag{A.11}$$

Dette medfører formel (A.12).

$$V_{e} = (R_{12} + R_{13}) \cdot I$$

$$\downarrow \qquad (A.12)$$

$$I = \frac{V_{e}}{R_{12} + R_{13}}$$

Indsættes (A.11) i (A.12) fås (A.13). Ovenstående gøres analogt for den anden side af broen, hvorfor formel (A.14) kan skrives.

$$V_{12} = \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{13}} V_e \tag{A.13}$$

$$V_{24} = \frac{R_{24}}{R_{24} + R_{34}} V_e \tag{A.14}$$

Output spændingen kan nu opskrives som formel (A.15).

$$V_{0} = V_{12} - V_{24} = \frac{R_{12}R_{34} - R_{24}R_{13}}{\left(R_{12} + R_{13}\right)\left(R_{24} + R_{34}\right)}V_{e}$$
(A.15)

Broen er balanceret hvis output spændingen er 0, hvilket medfører følgende.

$$R_{12}R_{34} = R_{24}R_{13}$$

Ændres modstandene nu med størrelserne ΔR_{12} , ΔR_{12} , ΔR_{12} og ΔR_{12} fås formel (A.16).

$$\Delta V_0 \approx \frac{\partial V_0}{\partial R_{12}} \Delta R_{12} + \frac{\partial V_0}{\partial R_{13}} \Delta R_{13} + \frac{\partial V_0}{\partial R_{34}} \Delta R_{34} + \frac{\partial V_0}{\partial R_{24}} \Delta R_{24}$$
(A.16)

Ses på første led på højresiden I formel (A.16), kan dette omskrives til formel (A.17) ved differentiation af formel (A.15).

$$\frac{\partial V_0}{\partial R_{12}} = \frac{R_{13}}{\left(R_{12} + R_{13}\right)^2} V_e \tag{A.17}$$

Dette gøres analogt for de andre led, hvilket medfører at formel (A.16) kan skrives som formel (A.18).

$$\Delta V_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_{12}}{R_{12}} - \frac{\Delta R_{13}}{R_{13}} + \frac{\Delta R_{34}}{R_{34}} - \frac{\Delta R_{24}}{R_{24}} \right) V_e \tag{A.18}$$

Modstandsændringen i en straingage kan ifølge (A.8) skrives som (A.19).

$$\frac{\Delta R_i}{R_i} = K_g \Delta \varepsilon_i \tag{A.19}$$

Indføres dette I formel (A.18) fås formel (A.20).

$$\Delta V_0 = \frac{K_g}{4} \left(\Delta \varepsilon_{12} - \Delta \varepsilon_{13} + \Delta \varepsilon_{34} - \Delta \varepsilon_{24} \right) V_e \tag{A.20}$$

Ved anvendelse af enkeltgages opstilles en kvartbro, hvor der kun anvendes én straingage i modsætning til halv- eller fuldbro, hvor henholdsvis to og fire straingages monteres. I stedet indsættes konstante modstande mellem de resterende punkter. Dette betyder, at formel (A.20) kan reduceres til formel (A.21), såfremt gagen påsættes mellem punkt 1 og 2.

$$\Delta V_0 = \frac{K_g}{4} \left(\Delta \varepsilon_{12} \right) V_e \tag{A.21}$$

Bilag B Virtuelle flytningers princip for krumme bjælker

Formålet med dette afsnit er at vise det virtuelle arbejdes princip gældende for krumme bjælker. Til dette benyttes virtuelle flytningers princip, VFP, hvor der tages udgangspunkt i bjælkens differentialligning og statiske feltligninger. Ydermere bestemmes sammenhængen mellem flytninger og tøjninger.

B.1 Geometriske overvejelser og antagelser

Den geometriske model for cirkelringen er illustreret på figur b.1, som viser et infinitesimalt udsnit, der spænder over vinklen $d\theta$.



Figur B.1: Geometrisk model og betegnelser for længder, vinkler og kræfter.

På figur b.1 er n en jævnt fordelt aksial linielast, og q er en jævnt fordelt linielast, der virker på tværs af bjælkeaksen.

Ved arbejde med infinitesimale udsnit, hvor der benyttes små vinkler, antages følgende at gælde:

 $d\theta^{2} \approx 0$ $ds^{2} \approx 0$ $\cos d\theta \approx 1$ $\sin d\theta \approx d\theta$

Ud fra den geometriske model opstilles sammenhængen mellem vinkelændring og buelængde i formel (B.1).

$$\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{ds}{\pi \cdot 2r} \Leftrightarrow ds = d\theta \cdot r \tag{B.1}$$

hvor

$d\theta$	er vinkelændringen
ds	er længden af bjælkeudsnittet
r	er radius af cirkelringen

De simplificerede konstitutive ligninger givet ved formel (B.2), (B.3) og (B.4) er gældende for plane, retlinede bjælker, og antages også gældende for krumme bjælker.

 $N = E \cdot A \cdot \varepsilon \tag{B.2}$

$$M = E \cdot I \cdot \kappa \tag{B.3}$$

$$V = G \cdot A_k \cdot \gamma \tag{B.4}$$

hvor

Ν	er normalkraften
Ε	er elasticitetsmodulen
A	er tværsnitsarealet
3	er normaltøjningen
M	er momentet
Ι	er inertimomentet
κ	er krumningstøjningen
V	er forskydningskraften
G	er forskydningsmodulen
A_k	er forskydningsarealet
γ	er forskydningstøjningen

Sammenhængen mellem tøjninger og flytninger for plane retliniede bjælker, kan ikke overføres direkte til krumme bjælker, idet tøjningerne og flytningerne ikke influerer på samme måde. Eksempelvis gælder formel (B.5) for krumme bjælker.

$$\kappa(x) \neq \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \tag{B.5}$$

B.2 Opstilling af de virtuelle flytningers princip

Ved brug af størrelserne angivet på figur b.1 kan ligevægtsligningerne opstilles. Der tages udgangspunkt i punktet A, der indeholder kraftændringerne, og derved findes henholdsvis ligning (B.6), (B.7) og (B.8).

$$0 = N' - \frac{1}{r}V + n \tag{B.6}$$

$$0 = V' + \frac{1}{r}N + q \tag{B.7}$$

$$0 = M' + V \tag{B.8}$$

De tre ligningssystemer (B.6), (B.7) og (B.8) benyttes efterfølgende ved opstillingen af det virtuelle arbejdes princip for den krumme bjælke ved Timoshenko bjælketeori. Derefter er det muligt at bestemme princippet for Bernoulli-Euler bjælketeori ved at sætte forskydningsdeformationer lig nul, hvorved V elimineres.

De tre ligningssystemer multipliceres med de tre kontinuerlige funktioner $\delta \alpha$, $\delta \beta$ og $\delta \gamma$, hvor δ angiver en variation. Herefter summeres leddene, hvorved formel (B.9) fremkommer.

$$0 = (M'+V)\delta\alpha + \left(N' - \frac{1}{r}V + n\right)\delta\beta + \left(V' + \frac{1}{r}N + q\right)\delta\gamma$$
(B.9)

Udtrykket integreres med hensyn til ds.

$$0 = \int_{a}^{b} \left(M' + V \right) \delta \alpha \cdot ds + \int_{a}^{b} \left(N' - \frac{1}{r}V + n \right) \delta \beta \cdot ds + \int_{a}^{b} \left(V' + \frac{1}{r}N + q \right) \delta \gamma \cdot ds$$

Funktionerne $\delta \alpha$, $\delta \beta$ og $\delta \gamma$ multipliceres på de enkelte led og efter et par delvise integrationer over de påførte rande fremkommer formel (B.10).

$$0 = \left[M\delta\alpha\right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} M\delta\alpha' \cdot ds + \int_{a}^{b} V\delta\alpha \cdot ds + \left[N\delta\beta\right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} N\delta\beta' \cdot ds - \int_{a}^{b} \frac{1}{r} V\delta\beta \cdot ds + \int_{a}^{b} n\delta\beta \cdot ds + \left[V\delta\gamma\right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} V\delta\gamma' \cdot ds + \int_{a}^{b} \frac{1}{r} N\delta\gamma \cdot ds + \int_{a}^{b} q\delta\gamma \cdot ds + \int_{a}^{b} q\delta\gamma \cdot ds$$
(B.10)

Udtrykket omskrives.

$$0 = \left[M\delta\alpha\right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} M\delta\alpha' \cdot ds + \int_{a}^{b} V\left(\delta\alpha - \frac{1}{r}\delta\beta - \delta\gamma'\right) ds$$
$$+ \left[N\delta\beta\right]_{a}^{b} + \int_{a}^{b} N\left(-\delta\beta' + \frac{1}{r}\delta\gamma\right) ds$$
$$+ \left[V\delta\gamma\right]_{a}^{b} + \int_{a}^{b} n\delta\beta \cdot ds + \int_{a}^{b} q\delta\gamma \cdot ds$$

Ligningssystemet opskrives med det indre virtuelle arbejde på venstresiden og det ydre virtuelle arbejde på højresiden, hvorved formel (B.11) fremkommer.

$$\int_{a}^{b} M \,\delta\alpha' \cdot ds + \int_{a}^{b} N \left(\delta\beta' - \frac{1}{r} \,\delta\gamma \right) ds + \int_{a}^{b} V \left(-\delta\alpha + \frac{1}{r} \,\delta\beta + \delta\gamma' \right) ds =$$

$$\int_{a}^{b} q \,\delta\gamma \cdot ds + \int_{a}^{b} n \,\delta\beta \cdot ds + \left[M \,\delta\alpha \right]_{a}^{b} + \left[N \,\delta\beta \right]_{a}^{b} + \left[V \,\delta\gamma \right]_{a}^{b}$$
(B.11)

Leddene i formel (B.11) kan rent fysisk fortolkes som følgende.

 $\int_{a}^{b} N\left(\delta\beta' - \frac{1}{r}\delta\gamma\right) ds$

 $\int_{a}^{b} M \delta \alpha' \cdot ds$ er det indre virtuelle arbejde af snitmomentet og krumningstøjningen.

er det indre virtuelle arbejde af normalkraften og normaltøjningen.

 $\int_{a}^{b} V\left(-\delta\alpha + \frac{1}{r}\delta\beta + \delta\gamma'\right) ds \qquad \text{er det indre virtuelle arbejde af forskydningskraften} \\ \text{og forskydningstøjningen.}$

- $\int_{a}^{b} q \delta \gamma \cdot ds$ er det ydre virtuelle arbejde af belastningen, q, og flytningen.
- $\int_{a}^{b} n\delta\beta \cdot ds$ er det ydre virtuelle arbejde af belastningen, *n*, og flytningen.
- $\begin{bmatrix} M \delta \alpha \end{bmatrix}_a^b \qquad \text{er det ydre virtuelle arbejde af endemomenter og enderotationer.}$
- $[N\delta\beta]_a^b$, $[V\delta\gamma]_a^b$ er det ydre virtuelle arbejde af endekrafter og endeflytninger.

For at give $\delta \alpha$, $\delta \beta$ og $\delta \gamma$ en fysisk betydning, betragtes $\delta \alpha$ som en virtuel rotation, $\delta \omega$, og $\delta \beta$ betragtes som en virtuel normalflytning δu . $\delta \gamma$ betragtes som virtuel tværflytning δv .

$$\delta \alpha = \delta \omega$$
$$\delta \beta = \delta u$$
$$\delta \gamma = \delta v$$

De virtuelle flytningers princip opskrives med de indførte fysiske betydninger.

$$\int_{a}^{b} M\delta\omega' ds + \int_{a}^{b} N\left(\delta u' - \frac{1}{r}\delta v\right) ds + \int_{a}^{b} V\left(-\delta\omega + \frac{1}{r}\delta u + \delta v'\right) ds =$$

$$\int_{a}^{b} q\delta v ds + \int_{a}^{b} n\delta u ds + [M\delta\omega]_{a}^{b} + [N\delta u]_{a}^{b} + [V\delta v]_{a}^{b}$$
(B.12)

Idet momentets arbejdskonjugerede er krumningstøjningen, $\delta\kappa$, normalkraftens arbejdskonjugerede er normaltøjningen, $\delta\varepsilon$, og forskydningskraftens arbejdskonjugerede er tværtøjningen, $\delta\varphi$, kan følgende udledes af formel (B.12).

$$\delta \kappa = \delta \omega'$$
 (B.13)

$$\delta \varepsilon = \delta u' - \frac{1}{r} \delta v \tag{B.14}$$

$$\delta\varphi = -\delta\omega + \frac{1}{r}\delta u + \delta v' \tag{B.15}$$

Det virtuelle arbejdes princip for den krumme Timoshenko bjælke kan herefter opstilles som formel (B.16) med hensyn til buelængden *ds*.

$$\int_{a}^{b} M \delta \kappa \cdot ds + \int_{a}^{b} N \delta \varepsilon \cdot ds + \int_{a}^{b} V \delta \varphi \cdot ds =$$

$$\int_{a}^{b} q \delta v \cdot ds + \int_{a}^{b} n \delta u \cdot ds + [M \delta \omega]_{a}^{b} + [N \delta u]_{a}^{b} + [V \delta v]_{a}^{b}$$
(B.16)

Hermed er det virtuelle arbejdsprincip vist gældende ved Timoshenko bjælketeori, hvilket betyder, at teorien kan anvendes til bestemmelse af flytninger og tøjninger.

Såfremt, det kun ønskes at arbejde med Bernoulli-Euler bjælketeori, sættes forskydningstøjningen lig nul, hvorefter henholdsvis formel (B.17), (B.18) og (B.19) findes ud fra formel (B.13), (B.14) og (B.15).

$$\delta \varepsilon = \delta u' - \frac{1}{r} \delta v \tag{B.17}$$

$$\delta \varphi = 0 = -\delta \omega + \frac{1}{r} \delta u + \delta v'$$

$$(B.18)$$

$$\delta \omega = \frac{1}{r} \delta u + \delta v'$$

$$\delta \kappa = \delta v'' + \frac{1}{r} u'$$

$$(B.19)$$

Bilag C Finite Element Method

I dette bilag beskrives FEM teorien, Finite Element Method, for kontinuumer som eksempelvis aluminium. Det vælges at se på FEM teorien ved benyttelse af den potentielle energi med henblik på en senere anvendelse til opbygning af skiveelementer. De generelle kilder til bilaget er [Byskov, 2002a] og [Byskov, 2002b].

C.1 Potentiel energi for et elastisk kontinuum

Den potentielle energi for et elastisk kontinuum består af tøjningsenergi i selve massen og potentiel energi for påførte ydre laster. Udtrykket for den totale potentielle energi, som i det følgende benævnes Π_p , kan benyttes til at formulere elementers stivhedsmatricer, spændinger samt knudelaster. Den potentielle energi for et hyperelastisk materiale i det tredimensionelle tilfælde er givet ved formel (C.1), jf. figur c.1.

$$\prod_{p}(u_{i}) = \int_{V} W(\gamma_{ij}) dV - \int_{V} \overline{q}_{i} u_{i} dV - \int_{S_{T}} \overline{\tau}_{i} u_{i} dS$$
(C.1)

hvor

$\int_{V} W(\gamma_{ij}) dV$	er den indre potentielle energi fra tøjningerne, γ_{ij}
$\int_{V} \overline{q}_{i} u_{i} dV$	er den ydre potentielle energi fra foreskrevne massekræfter
$\int_{S_T} \overline{\tau}_i u_i dS$	er den ydre potentielle energi fra foreskrevne overfladekræfter
$W(\gamma_{ij})$	er funktionen for tøjningsenergi
${\cal Y}_{ij}$	er Lagrangetøjningen
V	er voluminet af kontinuumet
\overline{q}_i	er foreskrevne massekræfter
u_i	er flytninger
$\overline{ au_i}$	er foreskrevne overfladekræfter
S	er omkredsen af kontinuumet



Figur C.1: Illustration af kontinuum.

Ved at betragte formel (C.1) ses, at Π_p , for et givet kontinuum med en given last, ikke afhænger af spændingerne, men kun af de kinematiske størrelser, specielt flytningerne u_m og tøjningerne γ_{ij} . Ved at tage variationen af tøjningerne er det ud fra (C.1) muligt at finde den generelle formel for de virtuelle flytningers princip.

For et lineært hyperelastisk materiale er den indre potentielle energi givet ved formel (C.2), hvor der ved hyperelastiske materiale menes, at spændingerne er uafhængige af tøjningernes historie.

$$W(\gamma_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl}$$
(C.2)

hvor

 $D_{ijkl} \qquad \text{er en fjerde ordens tensor} \\ \gamma_{mn} \qquad \text{er Lagrange tøjningen, givet ved } \gamma_{mn} = \frac{1}{2}(u_{m,n} + u_{n,m}) + \frac{1}{2}u_{k,m}u_{k,n}$

Inden der arbejdes videre med den potentielle energi, vælges det kort at analyseres Lagrangetøjningen, som består af henholdsvis den infinitesimale tøjningstensor, ε_{mn} , og infinitesimale rotationstensor, ω_{mn} , jf. formel (C.3) og formel (C.4).

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(u_{m,n} + u_{n,m}) = \varepsilon_{nm} \tag{C.3}$$

$$\omega_{mn} = \frac{1}{2} (u_{m,n} - u_{n,m}) = -\omega_{nm}$$
(C.4)

Ved antagelse af små tøjninger, moderate små rotationer samt lineære materialeteorier, haves formel (C.5).

$$\gamma_{mn} \approx \varepsilon_{mn}$$
 (C.5)
Derved kan formlen for den indre potentielle energi i formel (C.2) omskrives til (C.6).

$$W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$
(C.6)

I den videre teori simplificeres til det plane tilfælde, specifikt plan spændingstilstand, da spændingerne ud af planet $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{yz} = 0$, mens tøjningerne ud af planet er forskellig fra nul. Derved kan ligningen for den potentielle energi omskrives til formel (C.7), hvor der er skiftet til græske indeks, som antager værdierne 1 og 2.

$$\prod_{p} (u_{\alpha}) = \frac{1}{2} t \int_{A} D_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} dA - t \int_{A} \overline{q}_{\alpha} u_{\alpha} dA - \int_{S_{T}} \overline{\tau}_{\alpha} u_{\alpha} dS$$
(C.7)

Derved kan tøjningstensoren skrives som (C.8), ved brug af (C.3).

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} \right) \tag{C.8}$$

Ydermere er de konstitutive forhold for et isotropt materiale grundet symmetri og linearitet givet ved (C.9).

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}$$
(C.9)

I det følgende vælges at omformulere tensorformen til matrixform, hvor følgende definitioner benyttes, jf. formel (C.10) og (C.11).

$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon}\right\} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12} \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{u}_{1,1} \\ \boldsymbol{u}_{2,2} \\ \boldsymbol{u}_{1,2} + \boldsymbol{u}_{2,1} \end{cases}$$
(C.10)

$$\left\{\boldsymbol{u}\right\} = \begin{cases} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{cases} \tag{C.11}$$

Det er nu muligt at formulere formel (C.12).

$$\prod_{p} \left(\{ \boldsymbol{u} \} \right) = \frac{1}{2} t \int_{A} \{ \boldsymbol{\varepsilon} \}^{T} [\boldsymbol{D}] \{ \boldsymbol{\varepsilon} \} dA - t \int_{A} \{ \boldsymbol{u} \}^{T} \{ \overline{\boldsymbol{q}} \} dA - t \int_{S_{T}} \{ \boldsymbol{u} \}^{T} \{ \overline{\boldsymbol{\tau}} \} dS$$
(C.12)

For at muliggøre den videre udledning betragtes nu et vilkårligt element, i det fysiske koordinatsystem, det vil sige der foretages en udledning ud fra det lokale tilfælde. For elementet findes en sammenhæng mellem flytningen og knudeflytningerne for elementet, hvor knudeflytningen svarer til antal frihedsgrader. Sammenhængen mellem de to størrelser findes gennem formfunktioner, som samles i en matrice kaldet funktionsmatricen givet ved formel (C.13), jf. figur c.2.



Figur C.2: Illustration af et element i det fysiske koordinatsystem, hvor hver knude har to frihedsgrader.

$$\{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{N}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{C.13}$$

hvor

{u} er knudedeformationen er funktionsmatricen

[N]

 $\{d\}$ er knudeflytningerne

Formel (C.10) udskrives til formel (C.14).

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}]\{\boldsymbol{u}\} \tag{C.14}$$

Ved at kombinere formel (C.13) og (C.14) findes formel (C.15).

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{C.15}$$

hvor

 $[B] = [\partial][N]$

Ved at indsætte det nye udtryk for tøjningen givet ved formel (C.15) og (C.13) i formel (C.12) findes formel (C.16).

$$\Pi_{p}(\lbrace \boldsymbol{u}_{\alpha}\rbrace) = \frac{1}{2}t \int_{A} ([\boldsymbol{B}]\lbrace \boldsymbol{d}\rbrace)^{T} [\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\lbrace \boldsymbol{d}\rbrace dA - t \int_{A} ([\boldsymbol{N}]\lbrace \boldsymbol{d}\rbrace)^{T} \{\overline{\boldsymbol{q}}\rbrace dA$$
$$-t \int_{S_{T}} ([\boldsymbol{N}]\lbrace \boldsymbol{d}\rbrace)^{T} \{\overline{\boldsymbol{\tau}}\rbrace dS$$
$$= \frac{1}{2}t \int_{A} \{\boldsymbol{d}\rbrace^{T} [\boldsymbol{B}]^{T} [\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\lbrace \boldsymbol{d}\rbrace dA - t \int_{A} \{\boldsymbol{d}\rbrace^{T} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\overline{\boldsymbol{q}}\rbrace dA$$
$$-t \int_{S_{T}} \{\boldsymbol{d}\rbrace^{T} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\overline{\boldsymbol{\tau}}\rbrace dS$$
(C.16)

Ved indføring af funktionsmatricen blev et enkelt element betragtet. I det efterfølgende betragtes N antal elementer, hvorved formel (C.16) kan omskrives til (C.17).

$$\Pi_{p}(\{\boldsymbol{u}\}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} t \int_{A} \{\boldsymbol{d}\}^{T} [\boldsymbol{B}]^{T} [\boldsymbol{D}] [\boldsymbol{B}] \{\boldsymbol{d}\} dA - \sum_{n=1}^{N} t \int_{A} \{\boldsymbol{d}\}^{T} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\overline{\boldsymbol{q}}\} dA$$

$$- \sum_{n=1}^{N} t \int_{S_{T}} \{\boldsymbol{d}\}^{T} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\overline{\boldsymbol{\tau}}\} dS$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} t \{\boldsymbol{d}\}^{T} \int_{A} ([\boldsymbol{B}]^{T} [\boldsymbol{D}] [\boldsymbol{B}] dA) \{\boldsymbol{d}\} - \sum_{n=1}^{N} t \{\boldsymbol{d}\}^{T} \int_{A} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\overline{\boldsymbol{q}}\} dA$$

$$- \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} t \int_{S_{T}} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\overline{\boldsymbol{\tau}}\} dS \qquad (C.17)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} [\boldsymbol{k}] \{\boldsymbol{d}\} - \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} \{\overline{\boldsymbol{\tau}}\} - \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} \{\overline{\boldsymbol{s}}\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} [\boldsymbol{k}] \{\boldsymbol{d}\} - \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} (\{\overline{\boldsymbol{\tau}}\} + \{\overline{\boldsymbol{s}}\})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} [\boldsymbol{k}] \{\boldsymbol{d}\} - \sum_{n=1}^{N} \{\boldsymbol{d}\}^{T} \{\overline{\boldsymbol{f}}\}$$

I formel (C.17) er følgende benyttet.

$$[\boldsymbol{k}] = t \int_{A} [\boldsymbol{B}]^{T} [\boldsymbol{D}] [\boldsymbol{B}] dA$$
$$\{ \overline{\boldsymbol{r}} \} = t \int_{A} [\boldsymbol{N}]^{T} \{ \overline{\boldsymbol{p}} \} dA$$
$$\{ \overline{\boldsymbol{s}} \} = t \int_{S} [\boldsymbol{N}]^{T} \{ \overline{\boldsymbol{\tau}} \} dS$$

Formel (C.17) er den endelige form for potentiel energi for det enkelte element, hvilket vil blive benyttet i det følgende. Det er muligt at transformere elementets stivhedsmatrice til systemniveau ved at benytte elementets transformationsmatrix, [T], som er forskellig for hvert element i beregningsmetoden. Transformationen er givet ved formel (C.18).

$$[\boldsymbol{K}]_{j} = [\boldsymbol{T}]_{j}^{T} [\boldsymbol{k}]_{j} [\boldsymbol{T}]_{j}$$
(C.18)

Her er dimensionen af transformationsmatricen givet ved et antal elementfrihedsgrader og antal systemfrihedsgrader for henholdsvis rækker og kolonner. Transformationsmatricen bruges dog ikke i praksis i programmeringen, da elementernes position er kendt. Summeres samtlige stivhedsmatricer for elementerne på systemniveau, findes systemets samlede stivhedsmatrice givet ved formel (C.19).

$$[\boldsymbol{K}] = \sum_{j=1}^{N} [\boldsymbol{K}]_{j}$$
(C.19)

På samme måde transformeres elementernes knudeflytninger, $\{d\}$, og lastvektorer, $\{r\}$, jf. formel (C.20), hvorefter formel (C.21) kan opskrives.

$$\{V\} = [T]\{d\}$$

$$\{R\} = [T]\{f\}$$
(C.20)

$$\Pi_{p}\left(\left\{\boldsymbol{V}\right\}\right) = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{V}\right\}^{T}\left[\boldsymbol{K}\right]\left\{\boldsymbol{V}\right\} - \left\{\boldsymbol{V}\right\}^{T}\left\{\boldsymbol{R}\right\}$$
(C.21)

For at finde løsningen til flytningsfeltet tages variationen af formel (C.21), som kræves lig nul. Derved opskrives formel (C.22), hvilken benyttes i forbindelse med bestemmelse af materialeparametrene for enhedscellen.

$$\delta \prod_{p} (\{V\}) = \{\delta V\}^{T} ([K]\{V\} - \{R\}) = 0$$

$$(C.22)$$

$$[K]\{V\} = \{R\}$$

Ligningssystemet (C.22) løses i praksis ved, at der løses flere undersystemer, da kun dele af henholdsvis flytnings- og lastvektoren er kendt. Dette illustreres ved at betragte et system vist ved formel (C.23).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \{ \mathbf{d} \} = \{ \mathbf{R} \}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \overline{\mathbf{k}_{21}} & \overline{\mathbf{k}_{22}} \end{bmatrix} \{ \{ \mathbf{d}_1 \} \\ \{ \overline{\mathbf{d}}_2 \} \} = \begin{bmatrix} \{ \overline{\mathbf{f}}_1 \} \\ \{ \mathbf{f}_2 \} \end{bmatrix}$$
(C.23)

I formel (C.23) er en del af indgangene kendt i henholdsvis flytnings- og lastvektoren, eksempelvis $\{\overline{d}_2\}$ og $\{\overline{f}_1\}$, og de resterende værdier $\{d_1\}$ og $\{f_2\}$ ønskes bestemt. Derved løses først ligningssystemet for $\{d_1\}$ og efterfølgende $\{f_2\}$, jf. formel (C.24) og (C.25).

$$[\mathbf{k}_{11}]\{\mathbf{d}_1\} + [\mathbf{k}_{12}]\{\overline{\mathbf{d}}_2\} = \{\overline{\mathbf{f}}_1\}$$

$$(C.24)$$

$$\{\mathbf{d}_1\} = [\mathbf{k}_{11}]^{-1}(\{\overline{\mathbf{f}}_1\} - [\mathbf{k}_{12}]\{\overline{\mathbf{d}}_2\})$$

$$\{\mathbf{f}_2\} = [\mathbf{k}_{21}]\{\mathbf{d}_1\} + [\mathbf{k}_{22}]\{\overline{\mathbf{d}}_2\}$$

$$(C.25)$$

Sidste væsentlige punkt er beregningen af spændingerne ud fra tøjningerne, hvor sammenhængen er givet ved formel (C.26).

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{C.26}$$

Her er tøjningerne allerede kendte ud fra (C.15), hvorved spændingerne bestemmes ved formel (C.27).

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$$
(C.27)

Bilag D Isoparametriske lineære tøjningstrekanter

I dette bilag behandles teorien for lineære tøjningstrekanter, som er flytningsbaserede isoparametriske elementer til brug i CALFEM. Formålet er gennem påføring af flytningsfelter på elementet at bestemme elementets stivheds- og spændingsmatrice. Programmeringen af elementet benyttes til at opbygge enkelte FEM modeller. Som kilde anvendes [Cook, 2002], og såfremt en anden kilde er benyttet, er dette anført. Beregningsfiler findes som cd-bilag.

D.1 Elementets egenskaber

En lineær tøjningstrekant, LST element (Linear Strain Triangle), er vist på figur d.1. Det specielle ved LST elementer, i forhold til konstant tøjningstrekanter, CST elementer (Constant Strain Triangle), er, at kanterne i LST elementet beskrives ved andengradspolynomier, mens de ved CST elementet beskrives ved førstegradspolynomier. LST elementerne er isoparametriske, da de udover at have kurvede sider også har den egenskab, at både elementernes geometri og flytninger defineres ud fra samme formfunktioner.



Figur D.1: LST element i fysiske koordinatsystem.

Det ses på figur d.1, at LST elementet har seks knuder, hvor hver knude har to frihedsgrader. Knuderne udgør tre hjørneknuder og tre sideknuder, hvor frihedsgraderne benævnes u_i og v_i . For at redegøre for hvorfor LST elementet har lineære tøjninger, betragtes et element i det fysiske koordinatsystem, jf. figur d.1. Flytningens variation over elementet udtrykkes ved formlerne (D.1) og (D.2), da der er tale om en trekant, hvis kanter udtrykkes ved andengradspolynomier.

$$u = p_1 + p_2 x + p_3 y + p_4 x^2 + p_5 xy + p_6 y^2$$
(D.1)

$$v = q_1 + q_2 x + q_3 y + q_4 x^2 + q_5 xy + q_6 y^2$$
(D.2)

hvor

 $p_i og q_i$ er funktioner af frihedsgraderne

De generelle tøjnings-flytningsrelationer er givet ved formlerne (D.3), (D.4) og (D.5).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{D.3}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{D.4}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
(D.5)

Ved at kombinere formlerne (D.1) og (D.2) med (D.3), (D.4) og (D.5) bestemmes formlerne (D.6), (D.7) og (D.8).

$$\varepsilon_{xx} = p_2 + 2p_4 x + p_5 y \tag{D.6}$$

$$\varepsilon_{yy} = q_3 + 2q_6y + q_5x \tag{D.7}$$

$$2\varepsilon_{xy} = p_3 + q_2 + (p_5 + 2q_4)x + (2p_6 + q_5)y$$
(D.8)

Formlerne beskriver, at elementets tøjning varierer lineært ved deformation, da de er de partielt afledte af flytningsfunktionerne, som er af anden orden, og elementets kanter de-formerer som andengradskurver. Geometrien er givet ved figur d.1.

De definerede udtryk er gældende for elementer i det fysiske koordinatsystem, men da det er matematisk kompliceret at beskrive elementets egenskaber, blandt andet stivhedsmatricen, ud fra dette system, vælges det at placere elementet i et hjælpekoordinatsystem med de dimensionsløse koordinater ξ og η . Derved flyttes beskrivelsen fra et koordinatsystem, det fysiske, ind i et referenceelement. Ulempen ved at foretage beskrivelsen i dette element er, at der senere skal tages højde for koordinattransformationer ved udledning af tøjningsflytningsmatricen og derved både stivhedsmatricen og spændingsmatricen. Bestemmelsen af elementets stivhedsmatrice samt spændinger sker da gennem følgende punkter:

- Elementet placeres i et dimensionsløst koordinatsystem, hvorefter dets formfunktioner opstilles.
- Transformationsbetingelser med henblik på bestemmelse af stivhedsmatricen opstilles.
- Opstilling af elementets tøjnings-flytningsmatrice.
- De konstitutive forhold fastlægges.
- Elementets stivhedsmatrice opstilles.
- Elementets spændingskomponenter bestemmes.

D.2 Elementets formfunktioner

For at bestemme elementets stivhedsmatrice skal LST elementets formfunktioner først defineres og opstilles i funktionsmatricen, [N]. Som tidligere nævnt opstilles elementet og derved formfunktionerne på baggrund af de dimensionsløse hjælpekoordinater ξ og η . I det dimensionsløse koordinatsystem kan flytningernes variation over elementet ligeledes udtrykkes ved et sæt af formler, som formel (D.9) og (D.10). Udover et andet sæt koordinater er konstanterne i formlerne (D.9) og (D.10) ligeledes nogle andre end dem fra det fysiske koordinatsystem.

$$u = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2$$
(D.9)

$$v = b_1 + b_2 \xi + b_3 \eta + b_4 \xi^2 + b_5 \xi \eta + b_6 \eta^2, \qquad (D.10)$$

hvor

 $a_i og b_i$ er funktioner af frihedsgraderne

Der tages som det første udgangspunkt i, at LST elementerne er isoparametriske, hvorved elementernes geometri og flytninger begge defineres ud fra samme formfunktioner. Sammenhængen mellem funktionsmatricen, der indeholder formfunktionerne og flytningerne er udtrykt i formel (D.11).

$$\{\boldsymbol{u}\} = [N]\{\boldsymbol{d}\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{matrix}\} = \left\{\sum_{\boldsymbol{\Sigma}}^{N_{i}}\boldsymbol{u}_{i}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{matrix}\boldsymbol{u}_{x}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\\\boldsymbol{v}_{y}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}N_{1} & 0 & \cdots & N_{6} & 0\\ 0 & N_{1} & \cdots & 0 & N_{6}\end{matrix}\right] \left[\begin{matrix}\boldsymbol{u}_{1}\\\boldsymbol{v}_{1}\\\vdots\\\boldsymbol{u}_{6}\\\boldsymbol{v}_{6}\end{matrix}\right]$$
(D.11)

hvor

{*u*} er flytningsfeltet for elementet

 $\{d\}$ beskriver knudeflytningen for de enkelte knuders frihedsgrader

Da LST elementet er isoparametrisk gælder formel (D.12) ydermere.

$$\{\mathbf{x}\} = [N]\{\mathbf{c}\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\\y\\y\end{array}\right\} = \left\{\sum_{N_{i}}^{N_{i}}N_{i}y_{i}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}x(\xi,\eta)\\y(\xi,\eta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}N_{1} \quad 0 \quad \cdots \quad N_{6} \quad 0\\0 \quad N_{1} \quad \cdots \quad 0 \quad N_{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1}\\y_{1}\\\vdots\\x_{6}\\y_{6}\end{bmatrix}$$
(D.12)

hvor

- $\{x\}$ beskriver knudekoordinaterne for et punkt inde i elementet
- $\{c\}$ beskriver de forskrevne knudekoordinater

I begge ligningssystemer med funktionsmatricen er det benyttet, at formel (D.9) og (D.10) er opbygget af det samme grundlæggende ligningssystem, men med forskellige sæt af konstanter, hvorved funktionsmatricen er simplificeret til at indeholde parametrene N_1 til N_2 .

Funktionsmatricens indhold findes ved at foretage en enhedsflytning af de enkelte knuder i henholdsvis u_i og v_i retningen, jf. figur d.2. Først bestemmes sammenhængen mellem de enkelte knuders flytninger ved at tage udgangspunkt i formel (D.9) og (D.10), som kan omskrives til formel (D.13).

Indføringen af det dimensionsløse koordinatsystem er illustreret på figur d.2. Her er LST elementet vist i dets grundform med dets knudekoordinater, som er uafhængige af den oprindelige form eller størrelse af det fysiske element.



Figur D.2: LST element i det dimensionsløse koordinatsystem.

Det er herefter muligt at bestemme koefficienterne a_1 frem til a_6 , hvorved koefficienterne b_1 til b_6 også er defineret. Evalueringen foretages med udgangspunkt i formel (D.9), idet knudekoordinaterne benyttes.

$$u_{1} = u(0,0) = a_{1}$$

$$u_{2} = u(1,0) = a_{1} + a_{2} + a_{4}$$

$$u_{3} = u(0,1) = a_{1} + a_{3} + a_{6}$$

$$u_{4} = u(\frac{1}{2},0) = a_{1} + \frac{1}{2}a_{2} + \frac{1}{4}a_{4}$$

$$u_{5} = u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = a_{1} + \frac{1}{2}a_{2} + \frac{1}{2}a_{3} + \frac{1}{4}a_{4} + \frac{1}{4}a_{5} + \frac{1}{4}a_{6}$$

$$u_{6} = u(0,\frac{1}{2}) = a_{1} + \frac{1}{2}a_{3} + \frac{1}{4}a_{6}$$

Ovenstående ligningssystemer opstilles på matriceform.

[1	0	0	0	0	0	$\begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}$		u_1
1	1	0	1	0	0	a_2		<i>u</i> ₂
1	0	1	0	0	1	a_3		<i>u</i> ₃
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	a_4	=	u_4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	a_5		u_5
1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\lfloor a_6 \rfloor$		_ <i>u</i> ₆ _

Ved løsning af ligningssystemet findes variablerne a_1 til a_6 .

$$a_{1} = u_{1}$$

$$a_{2} = 4u_{4} - 3u_{1} - u_{2}$$

$$a_{3} = 4u_{6} - 3u_{1} - u_{3}$$

$$a_{4} = 2(u_{2} - 2u_{4} + u_{1})$$

$$a_{5} = 4(u_{1} + u_{5} - u_{6} - u_{4})$$

$$a_{6} = 2(u_{1} - 2u_{6} + u_{3})$$

På baggrund af resultatet omskrives formel (D.9) og (D.10) til henholdsvis formel (D.14) og (D.15).

$$u(\xi,\eta) = u_1 + (4u_4 - 3u_1 - u_2)\xi + (4u_6 - 3u_1 - u_3)\eta + 2(u_2 - 2u_4 + u_1)\xi^2 + 4(u_1 + u_5 - u_6 - u_4)\xi\eta + 2(u_1 - 2u_6 + u_3)\eta^2$$
(D.14)

$$v(\xi,\eta) = v_1 + (4v_4 - 3v_1 - v_2)\xi + (4v_6 - 3v_1 - v_3)\eta + 2(v_2 - 2v_4 + v_1)\xi^2 + 4(v_1 + v_5 - v_6 - v_4)\xi\eta + 2(v_1 - 2v_6 + v_3)\eta^2$$
(D.15)

I det foregående er det generelle udtryk for flytningen i forbindelse med funktionsmatricen givet ved formel (D.11), hvor [N] kan simplificeres grundet sammenhængen mellem formel (D.14) og (D.15) givet ved formel (D.13).

$$\begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

De enkelte formfunktioner, N_1 til N_6 , bestemmes ved enkeltvis at påføre en enhedsflytning, mens de resterende sættes til 0. Sættes eksempelvis $u_1 = 1$ findes N_1 .

$$u_1 = 1 \quad , N_1 = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$

Flytningen er illustreret på figur d.3.



Figur D.3: LST element, hvor knude 1 påføres en vandret enhedsflytning.

De resterende formfunktioner findes på tilsvarende vis.

$$\begin{split} u_2 &= 1 \quad , N_2 = -\xi + 2\xi^2 = \xi(2\xi - 1) \\ u_3 &= 1 \quad , N_3 = -\eta + 2\eta^2 = \eta(2\eta - 1) \\ u_4 &= 1 \quad , N_4 = 4\xi - 4\xi^2 - 4\xi\eta = 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ u_5 &= 1 \quad , N_5 = 4\xi\eta \\ u_6 &= 1 \quad , N_6 = 4\eta - 4\eta^2 - 4\xi\eta = 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{split}$$

Kravet ved at have opstillet LST elementet i det dimensionsløse koordinatsystem er, at der for hvert enkelt punkt i det dimensionsløse system kun må findes et og kun et dertilhørende punkt i det fysiske koordinatsystem. Dette er illustreret på figur d.4.



Figur D.4: LST element afbildet i henholdsvis det dimensionsløse plan til venstre og det fysiske plan til højre. Buen med pilene symboliserer, at der kun må findes ét tilhørende punkt i det fysiske ved transformation af et punkt fra det dimensionsløse plan.

D.3 Transformationsbetingelser

Den afgørende forskel mellem afbildningen i det fysiske koordinatsystem og det dimensionsløse koordinatsystem er forholdet mellem tøjningerne og flytningerne. Sammenhængen er ikke ens i begge koordinatsystemer grundet gradienterne. I det fysiske koordinatsystem haves $\partial/\partial x$, mens der i det dimensionsløse haves $\partial/\partial \xi$. Sammenhængen skal da søges på formen givet ved formlerne (D.16), hvor kædereglen er taget i brug.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y}$$
(D.16)

Da formfunktionerne netop afhænger af begge størrelser, kan formlerne (D.17) defineres.

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
(D.17)

Sammenhængen i formel (D.17) er udgangspunkt for elementets tøjnings-flytningsforhold. Ydermere giver ligningen mulighed for definition af Jacobimatricen, $[\mathfrak{T}]$, da formel (D.17) kan omskrives til (D.18).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [\mathfrak{I}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$
(D.18)

hvor

 $[\mathfrak{I}]^{-1}$ er den inverse Jacobimatrice.

Selve Jacobimatricen er givet ved formel (D.19).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\mathfrak{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_{i,\xi} x_i & \sum N_{i,\xi} y_i \\ \sum N_{i,\eta} x_i & \sum N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$
(D.19)

D.4 Elementets tøjnings-flytningsforhold

For at bestemme tøjnings-flytningsforholdet tages der udgangspunkt i de generelle tøjningsforhold givet ved formel (D.3) til (D.5), hvilke altid er gældende. Da LST elementet har 12 frihedsgrader kan formel (D.20) opskrives.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}]\{\boldsymbol{u}\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \\ \varepsilon_{yy}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \\ 2\varepsilon_{xy}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_6 \\ \boldsymbol{v}_6 \end{bmatrix}$$
(D.20)

Tøjningerne er i det givne tilfælde funktioner af hjælpekoordinater henholdsvis ξ og η , da disse er brugt til at bestemme flytningerne. Da sammenhængen mellem funktionsmatricen og knudeflytningerne er udtrykt ved formel (D.11), kan formel (D.21) opstilles.

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\}$$
$$\{u\} = [N]\{d\}$$
$$\downarrow$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}]\{N\}\{d\}$$

$$(D.21)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{B}]\{d\}$$

hvor

$$[\mathbf{B}] = [\partial][\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{bmatrix}$$

I ligningssystemet (D.21) er de partielt afledte med hensyn til koordinaterne x og y for N_i , givet ved formel (D.17). Derved kan tøjnings-flytningsmatricen bestemmes ved først at bestemme Jacobimatricen, hvorefter højresiden i ligningssytemet (D.18) er givet, da de partielt afledte formfunktioner i forhold til henholdsvis ζ og η kan findes.

For at tage et eksempel på udregningen af Jacobimatricen bestemmes indgang \mathfrak{I}_{11} .

$$\mathfrak{T}_{11} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i = (-3 + 4\xi + 4\eta) x_1 + (4\xi - 1) x_2 - 4(2\xi - 1\eta - 1) x_4 + 4\eta x_5 - 4\eta x_6$$

D.5 Konstitutive forhold

Sammenhængen mellem tøjninger og spændinger er givet ved formel (D.22) i form af den konstitutive matrice, [D].

$$\begin{cases} \sigma_{x} \\ \sigma_{y} \\ \tau_{xy} \end{cases} = [\boldsymbol{D}] \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{cases}$$
(D.22)

LST elementet kan befinde sig i to tilstande henholdsvis under plan tøjningstilstand eller plan spændingstilstand. Derved forefindes to former af den konstitutive matrice givet ved formel (D.23) for plan tøjningstilstand og formel (D.24) for plan spændingstilstand.

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$
(D.23)

$$[\mathbf{C}] = \frac{E}{1 - v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - v) \end{bmatrix}$$
(D.24)

D.6 Elementets stivhedsmatrice

Ved brug af Jacobimatricen og derved Jacobideterminanten, $\Im = \det([\Im])$, kan formel (D.25) opstilles, hvilken er gældende for det dimensionsløse koordinatsystem, da det virkelige areal er transformeret om til enhedsarealet.

$$[\boldsymbol{k}] = t \int_{A} [\boldsymbol{B}]^{T} [\boldsymbol{D}] [\boldsymbol{B}]_{\frac{1}{2}} dx dy = t \int_{A_{\xi,\eta}} [\boldsymbol{B}]^{T} [\boldsymbol{D}] [\boldsymbol{B}]_{\frac{1}{2}} \Im d\xi d\eta , \qquad (D.25)$$

Hvor arealet er udskrevet i begge ligningssystemer med en faktor 1/2, da der er tale om arealet for en trekant.

Det er muligt at omformulere formel (D.25) ved at indføre vægten W_i , der tager hensyn til brugen af Gauss punkter til bestemmelse af parametrene ζ og η i CALFEM. Der forefindes her kun én vægtparameter, da vægten i dette tilfælde gælder pr. knude og ikke pr. dimension. Ved brug af Gauss punkter kan en numerisk løsning til problemet findes ved formel (D.26).

$$[\boldsymbol{k}] \approx \frac{1}{2} \sum_{i} t \left[[\boldsymbol{B}]^{T} [\boldsymbol{D}] [\boldsymbol{B}] \Im W_{i} \right]_{A_{\xi,\eta}}$$
(D.26)

Det vælges i programmeringen at benytte tre Gauss punkter til at bestemme stivhedsmatricen, hvorved summationen går fra en til tre. Derved bliver W_i lig 1/3 og valget af antal Gauss punkter ses på figur d.5.



Figur D.5: Illustration af Gauss-punkter.

Generelt forbedres den numeriske løsning til problemet jo flere Gausspunkter, der benyttes. Beregningstiden vokser jo flere Gausspunkter, der benyttes, og derfor vælges det for LST elementet at benytte tre Gausspunkter, hvorved der ved plotning af spændinger i CALFEM foretages en lineær interpolation for de seks knudepunkter.

Det vælges i beregningerne at bestemme spændingerne i hjørneknuderne.

D.7 Spændinger i elementet

Udover elementets stivhedsmatrice er det ligeledes muligt at bestemme spændinger i elementet ved brug af de tidligere udledte parametre. Grundlæggende set gælder formel (D.27).

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

$$(D.27)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{D}][\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{d}\}$$

Det ses herved, at beregningsproceduren til bestemmelse af stivhedsmatricen er gældende ved estimering af spændingerne i LST elementet, grundet flytnings-tøjningsmatricen.

D.8 Patch test

Formålet med afsnittet er at eftervise, at det konstruerede LST-element virker efter hensigten. Dette kan gøres ved brug af en Patch test, hvor flere forudbestemte spændingstilstande søges for en given model opbygget af LST-elementer med mindst én indvendig knude. Patchen, der programmeres som et kvadrat, opbygges af fire LST-elementer med mindst én indre knude, hvor patchen understøttes fast simpelt således, at den er statisk bestemt. Efter konstruktion af patchen påføres de, for den ønskede spændingstilstand, relevante knuder en bestemt belastning. Kravet til knudebelastningerne er, at de samlet svarer til en jævnt fordelt last, og ved analyse af patchen skal spændingstilstanden være konstant, såfremt materialet er isotropt og spændinger er beregnet ved Hookes lov. Dette gøres for henholdsvis σ_{xx} , σ_{yy} og σ_{xy} . Grunden til, at dette ønskes eftervist, er, at elementerne skal kunne modellere en konstant spændingstilstand for hvert element.

D.8.1 Opbygning af patchen

Ideen med patchen, hvis ydre vælges som et kvadrat, er, at den lige netop er understøttet sådan, at der ikke forekommer stivlegeme bevægelser. Ydermere skal der mindst være én knude, som hverken er belastet eller fastholdt, hvilket gøres ved at placere en indre knude. Patchen er vist på figur d.6, hvor de valgte mål er angivet.



Figur D.6: Illustration af patch hvor de benyttede mål til beregning er angivet.

Den simple understøtning i venstre side tillader Poisson-effekter, her tøjningen ε_{xx} eller ε_{yy} , hvilket er centralt såfremt Poissons forhold er forskelligt fra 0. Derved er det også muligt at kontrollere knudeflytningerne i patchen, da der eksempelvis ved enakset spændingstilstand skal være en sammenhæng mellem de horisontale og vertikale knudeflytninger, givet ved Poissons forhold.

Sidste faktor i forbindelse med test af LST-elementet via patch testen er belastningen. Det ønskes, at patchen påføres henholdsvis enakset træk og ren forskydning, hvorved der findes de tre spændingstilstande σ_{xx} , σ_{yy} og σ_{xy} , der skal være konstante overalt i patchen. Da der ikke kan påføres linielaster, men kun knudelaster, skal størrelserne af disse vælges svarende til linielast. Størrelsen af knudelasterne afhænger af antal knuder på randen, og for seks knuders elementer kan det vises, at knudebelastningen skal være 1/6 *P* og 2/3 *P* i henholdsvis hjørneknuderne og de midterste knuder. I afsnit D.8.5 er problematikken beskrevet.

I modellen benyttes tre Gausspunkter samt følgende materialeparametre og laster.

P = 100000 NE = 71000 MPav = 0, 3t = 10 mm

D.8.2 Patch test ved enakset træk langs x-aksen

Patch-testen ved enakset træk langs x-aksen er givet ved figur d.7.



Figur D.7: Patch-test ved enakset træk langs x-aksen.

Efter endt beregning i CALFEM fås resultat vist ved figur d.8, samt en række størrelser for spændingen i patchen, jf. cd-bilag. Den forventede værdi af spændingen er 1000 MPa. Ud fra beregningsresultaterne i CALFEM er det muligt at bestemme middelværdi og spredning af σ_{xx} . Størrelserne af spændingerne er givet i tabel d.1.

Gausspunkt	$\sigma_{_{1,xx}}$ [MPa]	$\sigma_{_{2,xx}}$ [MPa]	$\sigma_{_{3,xx}}$ [MPa]	$\sigma_{_{4,xx}}$ [MPa]
1	1000,00003007609	1000,00004065488	1000,00002618176	1000,00003272992
2	999,999987760842	999,999981640514	999,999980732386	999,999983185621
3	1000,00002264547	999,999977857992	999,999979591717	999,999984033339

Tabel D.1: Spændinger, σ_{xx} , for henholdsvis element 1 til 4.

Middelværdien og standardafvigelsen beregnes.

 $\overline{\sigma}_{xx} = 1000 \text{ MPa} + 2,26 \cdot 10^{-6} \text{ MPa}$ $S = 2,53 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}$

Det kan heraf ses, at standardafvigelsen er af størrelsesordenen 10⁻⁵, hvorved det må antages, at afvigelsen skyldes de numeriske unøjagtigheder. Beregningerne antages derved at stemme overens med det forventede resultat med konstant spændingstilstand i hele patchen. Deformationen af patchen er vist på figur d.8.



Figur D.8: Deformation af patchen ved enakset træk langs x-aksen vist ved den stiplede linie.

D.8.3 Patch-test ved enakset træk langs y-aksen

Patch-testen ved enakset træk langs y-aksen er givet ved figur d.9.



Figur D.9: Patch-test ved enakset træk langs y-aksen.

Efter endt beregning i CALFEM fås resultat vist ved figur d.10, samt en række størrelser for spændingen i patchen, jf. cd-bilag. Den forventede værdi af spændingen er som før 1000 MPa. Ud fra beregningsresultaterne i CALFEM er det muligt at bestemme middelværdi og spredning af σ_{yy} . Størrelserne af spændingerne er givet i tabel d.2.

Gausspunkt	$\sigma_{\scriptscriptstyle 1,yy}$ [MPa]	$\sigma_{2,yy}$ [MPa]	$\sigma_{\scriptscriptstyle 3,yy}$ [MPa]	$\sigma_{4,yy}$ [MPa]
1	1000,00004065488	999,99997785799	999,999981640513	1000,00004065488
2	1000,0000300761	1000,00002264547	999,99998776084	1000,0000300761
3	1000,00003272992	999,999984033338	999,999983185622	1000,00003272992

Tabel D.2: Spændinger, σ_{yy} , for henholdsvis element 1 til 4.

Middelværdien og standardafvigelsen beregnes.

 $\overline{\sigma}_{yy} = 1000 \text{MPa} + 2,26 \cdot 10^{-6} \text{MPa}$ $S = 2,53 \cdot 10^{-5} \text{MPa}$

Igen er standardafvigelsen af størrelsesordenen 10⁻⁵, hvorved det må antages, at afvigelsen skyldes de numeriske unøjagtigheder. Beregningerne antages derved at stemme overens med det forventede resultat med konstant spændingstilstand i hele patchen. Deformationen af patchen er vist på figur d.10.



Figur D.10: Deformation af patchen ved enakset træk langs y-aksen vist ved den stiplede linie.

D.8.4 Patch-test ved ren forskydning

Patch-testen ved ren forskydning er givet ved figur d.11.



Figur D.11: Patch-test ved ren forskydning.

Beregningerne udført i CALFEM giver resultatet vist ved figur d.12, samt en række størrelser for spændingen i patchen, jf. cd-bilag og tabel d.3. Som tidligere er den forventede værdi af spændingen for ren forskydning 1000 MPa, og ud fra beregningsstørrelserne er det muligt at bestemme middelværdi og spredning af σ_{xy} .

Gausspunkt	$\sigma_{\mathrm{l},yy}$ [MPa]	$\sigma_{_{2,yy}}$ [MPa]	$\sigma_{_{3,yy}}$ [MPa]	$\sigma_{_{4,yy}}$ [MPa]
1	1000,00003256426	999,999978680467	1000,00001239717	1000,00003256426
2	1000,00003256426	1000,00001239717	999,999978680466	1000,00003256426
3	1000,00002312162	999,999989262241	999,999979735513	1000,00002312162

Tabel D.3: Spændinger, σ_{yy} , for henholdsvis element 1 til 4.

Middelværdien og standardafvigelsen beregnes.

 $\overline{\sigma}_{xy} = 1000 \text{ MPa} + 2,63 \cdot 10^{-6} \text{ MPa}$ $S = 2,21 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}$

Afvigelsen skyldes de numeriske unøjagtigheder. Beregningerne antages derved at stemme overens med det forventede resultat med konstant spændingstilstand i hele patchen. Deformationen af patchen er vist på figur d.12.



Figur D.12: Deformation af patchen ved ren forskydning vist ved den stiplede linie.

D.8.5 Ændring af overfladekræfter til knudekræfter

Ud fra bilag C, hvor den generelle teori vedrørende virtuelle flytningers princip er beskrevet, er lastvektoren kort omtalt. Den generelle formulering af lastvektoren er givet ved formel (D.28), hvilken indeholder henholdsvis overflade-, masse- og knudekræfter, der alle omregnes til en fælles størrelse for knudekræfterne.

$$\{\boldsymbol{f}\} = \{\boldsymbol{r}\} + \{\boldsymbol{s}\} + \{\boldsymbol{p}\} = t \int_{A} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\boldsymbol{q}\} dA + \int_{S} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\boldsymbol{\tau}\} dS + \{\boldsymbol{p}\}$$
(D.28)

hvor

 $\{r\}$ er knudernes lastvektor for massekræfter

 $\{s\}$ er knudernes lastvektor for fordelte overfladekræfter

- *{p}* er knudernes lastvektor for koncentrerede knudekræfter
- $\{q\}$ er massekræfter
- $\{\boldsymbol{\tau}\}$ er overfladekræfter

I det følgende er det kun relevant at betragte overfladekræfterne, da det er disse, der ønskes omformuleret til knudekræfter. For at bestemme knudekræfterne for ensfordelte laster omformuleres ligningssystemet til formel (D.29), jf. figur d.13.

$$\{\boldsymbol{s}\} = \int_{S} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\boldsymbol{\tau}\} dS = \int_{S} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\boldsymbol{\tau}\} \sqrt{dx^{2} + dy^{2}}$$
(D.29)



Figur D.13: Trekantet infinitesimal med sidelængderne dx og dy.

Ligningssystemet er i (D.29) formuleret ud fra det fysiske koordinatsystem, men omformuleres i det følgende via det dimensionsløse koordinatsystem, givet ved formel (D.30), hvor de dimensionsløse koordinater ξ og η er benyttet.

$$\{\boldsymbol{s}\} = \int_{S} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\boldsymbol{\tau}\} \sqrt{d\xi^{2} + d\eta^{2}}$$
(D.30)

Formel (D.30) kan opskrives som vist, da det er antaget, at elementet i det fysiske koordinatsystem stemmer overens med referenceelementet i det dimensionsløse system. Såfremt det ønskes at bestemme knudernes lastvektor for fordelte overfladekræfter numerisk, indføres en approksimationen givet ved (D.31), hvor vægten, W_i , og Jacobideterminanten er benyttet.

$$\{\boldsymbol{s}\} = \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{N}]^{T} \{\boldsymbol{T}_{s}\} \det[\boldsymbol{\mathfrak{T}}] W_{i} dL$$
(D.31)

Formlen (D.31) kan kun bestemmes numerisk ved brug af Gausspunkter på randen, hvorved knudekræfterne for en vilkårlig trekant i det fysiske koordinatsystem kan findes ud fra en vilkårlig ensfordelt last. I det følgende vælges at gennemføre beregningen for en trekant påført ensfordelt last i det dimensionsløse koordinatsystem, det vil sige en analytisk beregning. Derved bevises det ikke, at fordelingen er rigtig, men det sandsynliggøres. Lastfordelingen, der ønskes omregnet til knudekræfter, er skitseret på figur d.14.



Figur D.14: Illustration af trekantet LST-element i det dimensionsløse koordinatsystem, inklusiv fladelast.

Ved brug af formel (D.30) opskrives formel (D.32), som er gældende for analysen i det dimensionsløse koordinatsystem vist på figur d.14.

$$\{s\} = \int_{S} \begin{bmatrix} N_{1} & 0\\ 0 & N_{1}\\ \vdots & \vdots\\ N_{6} & 0\\ 0 & N_{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x}\\ P_{y} \end{bmatrix} \sqrt{d\xi^{2} + d\eta^{2}}$$
(D.32)

Analysen gælder i det følgende kun for venstre rand ved vandret belastning, hvor det kun er formfunktionerne N_I , N_3 og N_6 , der antager en størrelse, da både ξ og $d\xi$ er lig nul på randen. At ξ er lig nul påvirker samtlige formfunktioner i funktionsmatricen. Ud fra disse betragtninger udregnes vektoren svarende til alle knudekræfter.



Det er herved vist, at den midterste knude får knudekræften 2/3P de to hjørneknuder 1/6P.

D.9 Egenværdi test

Formålet med afsnittet er at eftervise, at det konstruerede LST-element virker efter hensigten. Dette gøres ved brug af en såkaldt egenværdi-test, som er et supplement til Patchtesten beskrevet i bilag D.8. Patch-testen efterviser ikke om elementet er godt eller dårligt, men efterviser om det opfylder nogle bestemte funktionskrav. Testens udgangspunkt er det overordnede ligningssystem, der beskriver sammenhængen mellem knudeflytningerne og knudekræfterne. Efterfølgende vælges det at lade knudekræfterne være proportionale med knudeflytningerne ved faktoren λ . Derved kan formel (D.33) opskrives, hvilket er et egenværdiproblem.

(D.33)

$$[\mathbf{k}]{\mathbf{d}} = {\mathbf{f}} = \lambda_i {\mathbf{d}}$$
$$([\mathbf{k}] - \lambda_i [\mathbf{I}]){\mathbf{d}} = {\mathbf{0}}$$

hvor

 $\{f\}$ er knudekræfterne

 $\{d\}$ er knudeflytningerne

[*k***]** er stivhedsmatricen

[I] er enhedsmatricen

Her er λ_i egenværdier af [k], hvorved der er lige så mange værdier λ_i , som der er indgange i $\{d\}$. Da der er mulighed for tre lineært uafhængige stivlegeme flytninger i planet, skal der være tre af egenværdierne, der giver nul for LST-elementet, der netop er et plant element. Ydermere skal de øvrige indgange være positive værdier. Analyseres elementet i CALFEM findes, at LST-elementet opfylder egenværdi-testen, jf. tabel d.4 og cd-bilag.

	λ_{i}		λ_{i}	
1	$[10^6]$	1	$[10^6]$	
1	87,069	14	10,375	
2	84,463	15	0,800	
3	67,313	16	0,636	
4	54,810	17	0,518	
5	41,516	18	0,407	
6	38,315	19	0,361	
7	34,924	20	0,224	
8	28,316	21	0,149	
9	22,238	22	0,182	
10	17,912	23	0,168	
11	14,318	24	0,000	
12	13,503	25	0,000	
13	12,227	26	0,000	

Tabel D.4: Egenværdier for den globale stivhedsmatrice.

Bilag E Spændingshybrid element

I dette bilag behandles teorien for det spændingshybride element, som er baseret på komplementær energi. Ved udledning benyttes som udgangspunkt grundligningerne for komplementær energi, hvorefter der skiftes til modificeret komplementær energi for at finde flytninger og spændinger. Disse benyttes efterfølgende til at opstille et isoparametisk Q4 spændingshybridt element. Det er brugen af flytningsbetingelser i kombination med spændingsteorien, der gør, at elementet er et hybrid. Bilaget er skrevet ud fra [Byskov, 2002a] og [Byskov, 2002b].

E.1 Komplementær energi

Fordelen ved at basere FEM elementer på komplementær energi er, at de er mere fleksible end dem for potentiel energi, hvor elementerne ofte modellerer for stive systemer. Dette vil sige, at nedbøjningerne for visse modeller ofte kan være for lille. Under udledningsproceduren konverteres til modificeret komplementær energi, Lagrangemultiplikatorer indføres, hvorved opfyldelsen af specifikke sidebetingelser ved elementrandene løsnes.

For at opstille den komplementære energi betragtes figur e.1, hvor et kontinuum med volumen, V, er opdelt i to enheder med volumen $V^{(J)}$ og $V^{(K)}$. For enhederne defineres den statiske og kinematiske rand som henholdsvis $S_T^{(J)}$, $S_T^{(K)}$ og $S_u^{(J)}$, $S_u^{(K)}$, mens diskontinuitetsranden, S_D , foreskriver grænserne, som også kan skrives som $S^{(JK)}$. Her angiver de to indeks J og K sammenhængen mellem enhederne. For et givent element, med elementnumret, J, kan dette tolkes ved, at elementet har et antal naboelementer, som hver har elementnummeret K. Endelig defineres n som normalen til diskontinuitetsranden med ortogonalen t.



Figur E.1: Principskitse af en masse indeholdende en diskontinuert overflade.

Den komplementære energi, Π_C , opskrives for det generelle tredimensionelle tilfælde, jf. formel (E.1), hvor det er spændingerne og ikke tøjningerne, der laver energi.

$$\Pi_{C}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{V} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{S_{u}} T_{i} \overline{u}_{i} dS$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V^{(J)} + V^{(K)}} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{S_{u}^{(J)} + S_{u}^{(K)}} T_{i} \overline{u}_{i} dS$$
(E.1)

hvor

 T_i

er spændingerne på randen

 \overline{u}_i er de forskrevne randflytninger

For σ_{ij} og T_i kræves, at de skal opfylde følgende statiske betingelser. Dette gælder ligevægtsbetingelsen givet ved formel (E.2) og en statisk randbetingelse givet ved formel (E.3) , da de benyttes som hjælpebetingelser til den komplementære energi. I begge ligninger referer en streg til, at variablen er foreskrevet.

$$\sigma_{ij,j} + \overline{q}_i = 0 \quad , x_i \in V^{(J)} \tag{E.2}$$

$$\sigma_{ij}n_j = \overline{T}_i \quad , x_i \in S_T^{(J)}$$
(E.3)

Ud fra formel (E.2) følger også kravet givet ved formel (E.4), hvilken gælder for enhver indre overflade, jf. figur e.1 og figur e.2. Ligningssystemet er gældende, da spændingerne er kontinuerte over grænsen.

$$\left(\sigma_{ij}n_{j}\right)^{(K)} = -\left(\sigma_{ij}n_{j}\right)^{(J)}, \quad x_{i} \in S_{D}$$
(E.4)



Figur E.2: Illustration af spændinger på indre overflade.

Formel (E.4) omskrives ved brug af formel (E.5), hvor enhedsnormalen $n^{(JK)}$ indføres. Derved bestemmes (E.6).

$$n^{(JK)} = n^{(J)} = -n^{(K)}$$
(E.5)

$$\left(\sigma_{ij}^{(K)} - \sigma_{ij}^{(J)}\right) n_{j}^{(JK)} = 0, \quad x_{i} \in S_{D} = S^{(JK)}$$
(E.6)

E.2 Modificeret komplementær energi

Med udgangspunkt i det forrige afsnit indføres nu de to Lagrangemultiplikatorer $\eta_i^{(T)}$ og $\eta_i^{(12)}$, hvorved der skiftes til modificeret komplementær energi. Lagrangemultiplikatorerne indføres, da det i det videre forløb vælges, at de to sidebetingelser (E.3) og (E.6) ikke kræves opfyldt eksakt, mens (E.2) stadig kræves opfyldt. Ved at udelade de to sidebetingelser og i stedet indføre Lagrangemultiplikatorerne udjævnes diskontinuiteten af spændingerne mellem to grænser ved, at forskellen fordeles over begge grænser. Sagt på en anden måde tillades en spændingsforskel mellem to rande, hvilken efterfølgende midles og fordeles jævnt på randene. De to Lagrangemultiplikatorer kan i det generelle tilfælde tolkes som flytninger af randen for $V^{(J)}$ og $V^{(K)}$, hvor $\eta_i^{(T)}$ er flytninger på de statiske rande, og $\eta_i^{(JK)}$ er flytninger på de diskontinuerte rande.

Den modificerede komplementære energi kan nu bestemmes ved brug af formel (E.7), hvor den nævnte udjævning, ved hjælp af Lagrangemultiplikatorerne, er benyttet.

$$\Pi_{CM} \left(\sigma_{ij}, \eta_{i}^{(T)}, \eta_{i}^{(JK)} \right) = \frac{1}{2} \int_{V^{(J)} + V^{(K)}} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dV - \int_{S_{u}^{(J)} + S_{u}^{(K)}} \sigma_{ij} n_{j} \overline{u}_{i} dS$$

$$- \int_{S_{T}^{(J)} + S_{T}^{(K)}} \eta_{i}^{(T)} \left(\sigma_{ij} n_{j} - \overline{T}_{i} \right) dS$$

$$+ \int_{S^{(JK)}} \eta_{i}^{(JK)} \left(\sigma_{ij}^{(K)} - \sigma_{ij}^{(J)} \right) n_{j}^{(JK)} dS$$
(E.7)

For at indsnævre problemet betragtes i det følgende et kontinuum, i det plane tilfælde, som er inddelt i N_{el} antal elementer. Derved kan formel (E.7) omskrives til (E.8).

$$\Pi_{CM} = \sum_{J=1}^{N_{el}} \left(\frac{1}{2} t \int_{A^{(J)}} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} dA - t \int_{S_{u}^{(J)}} \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} \overline{u}_{\alpha} dS - t \int_{S_{\tau}^{(J)}} \eta_{\alpha}^{(T)} \left(\sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} - \overline{T}_{\alpha} \right) dS + \sum_{K=1}^{J-1} t \int_{S^{(JK)}} \eta_{\alpha}^{(JK)} \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(K)} - \sigma_{\alpha\beta}^{(J)} \right) n_{\beta}^{(JK)} dS \right)$$
(E.8)

I ligningssystemet bemærkes det, at den øvre grænse i den indre sum over diskontinuitetsrandene går fra K lig 1 op til J - 1, hvilket sikrer, at hver elementgrænse kun forekommer en gang i summationen. Efterfølgende ønskes det at omskrive formel (E.8) på matriceform, hvorved betingelse (E.9) er gældende, såfremt der antages plan spændingstilstand. Både [ε] og [σ] er defineret i bilag C.

$$\varepsilon_{\beta} = C_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha} \Leftrightarrow \{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$$
(E.9)

Ydermere opskrives hjælpebetingelsen givet ved (E.10).

$$T_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} \Leftrightarrow \{ \mathbf{T} \} = [\mathbf{n}] \{ \boldsymbol{\sigma} \}$$
(E.10)

hvor

 T_{α} er en fladekraft.

Matricen [n] indeholder elementerne til normalvektoren, n_{α} , som er en enhedsvektor, og denne er i det todimensionale tilfælde givet ved (E.11). Her danner n_1 og n_2 enhedsvektoren, hvor n_1 og n_2 henholdsvis er parallel med ordinaten og abscissen i koordinatsystemet.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}$$
(E.11)

Den modificerede komplementære energi kan nu opskrives på matriceform for det todimensionale tilfælde, jf. formel (E.12).

$$\Pi_{CM} = \sum_{J=1}^{N_{ef}} \left(\frac{1}{2} t \int_{\mathcal{A}^{(J)}} \{\boldsymbol{\sigma}\}^{T} \{\boldsymbol{C}\} \{\boldsymbol{\sigma}\} dA - \int_{S_{u}^{(J)}} \{\boldsymbol{T}\}^{T} \{\bar{\boldsymbol{u}}\} dS - t \int_{S_{T}^{(J)}} \{\boldsymbol{\eta}^{(J)}\}^{T} (\{\boldsymbol{T}\} - \{\bar{\boldsymbol{T}}\}) dS + \sum_{K=1}^{J-1} t \int_{S^{(JK)}} \{\boldsymbol{\eta}^{(JK)}\}^{T} (\{\boldsymbol{T}^{(KJ)}\} - \{\boldsymbol{T}^{(JK)}\}) dS \right)$$
(E.12)

For at bestemme den modificerede komplementære energi på elementniveau, givet ved formel (E.12), indføres nu en række størrelser, der diskretiserer problemet. Den statiske randbetingelse formel (E.2) skal til enhver tid være opfyldt, hvilket også er gældende for spændingerne, jf. formel (E.13).

$$\left\{\boldsymbol{\sigma}(x_{\alpha})\right\} = \left[N_{\beta}(x_{\alpha})\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}, \quad x_{\alpha} \in V^{(J)}$$
(E.13)

hvor

$$\{v_{\beta}\}$$
er spændingsparametrene $[N_{\beta}(x_{\alpha})]$ er spændingsinterpolationsmatricen

I formel (E.13) er der set bort fra eventuelle volumenkræfter, det vil sige at $\sigma_{\alpha\beta,\beta}$ er lig nul, hvilket er en statisk feltbetingelse. For at sikre at formel (E.13) opfylder formel (E.2), skal spændingsinterpolationsmatricen vælges, så kravet er opfyldt.

Ydermere indføres en størrelse for spændingerne på randen af element J, { $T(x_{\alpha})$ }, jf. formel (E.14), som også kræves opfyldt for (E.2). I ligningsudtrykket er eventuelle begyndelsesspændinger elimineret.

$$\left\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right\} = \left[\boldsymbol{F}_{\beta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}, \quad \boldsymbol{x}_{\alpha} \in S^{(J)}$$
(E.14)

hvor

 $[F_{\beta}(x_{\alpha})]$ er produktet af enhedsnormalen [n] og spændingsinterpolationsmatricen

Det vælges at fortolke Lagrangemultiplikatoren for randflytningerne ved formel (E.15).

$$\left\{\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right\} = \left[\boldsymbol{N}_{\eta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right] \left\{\boldsymbol{\nu}_{\eta}\right\}, \quad \boldsymbol{x}_{\alpha} \in S^{(J)}$$
(E.15)

Til bestemmelse af Lagrangemultiplikatoren benyttes flytningsinterpolationsmatricen $[N_{\eta}]$, som er begrænset til elementets grænser, hvorved flytningerne inde i selve elementet ikke er defineret af (E.15). Til bestemmelse af multiplikatoren benyttes flytningsfeltets parametre givet ved { v_{η} }. Antagelsen om, at (E.15) er gældende, medfører, at de foreskrevne randflytninger, \bar{u} , antages at kunne beskrives ved samme flytningsinterpolationsmatrice som (E.15), jf. formel (E.16).

$$\left\{\overline{\boldsymbol{u}}(x_{\alpha})\right\} = \left[N_{\eta}(x_{\alpha})\right]\left\{\overline{\boldsymbol{v}}_{\eta}\right\}, \quad x_{\alpha} \in S_{u}^{(J)}$$
(E.16)

Ud fra formlerne (E.13), (E.14), (E.15) og (E.16) er det nu muligt at omformulere den modificerede komplementære energi, jf. formel (E.17).

$$\Pi_{CM}\left(\left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\},\left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}\right) = \sum_{J=1}^{N_{el}} \left(\frac{1}{2}t \int_{\mathcal{A}^{(J)}} \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{N}_{\beta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right]^{T} \left[\boldsymbol{C}\right] \left[\boldsymbol{N}_{\beta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\} dA$$
$$-t \int_{S_{u}^{(J)}} \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{F}_{\beta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right]^{T} \left[\boldsymbol{N}_{\eta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\} dS$$
$$-t \int_{S_{T}^{(J)}} \left(\left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{F}_{\beta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right]^{T} - \left[\boldsymbol{\overline{T}}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right]^{T}\right) \left[\boldsymbol{N}_{\eta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\} dS$$
$$+t \int_{S^{(J)}-S_{u}^{(J)}-S_{T}^{(J)}} \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{F}_{\beta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right]^{T} \left[\boldsymbol{N}_{\eta}(\boldsymbol{x}_{\alpha})\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\} dS\right)_{J}$$
(E.17)

hvor

J indikerer, at alle vektorer og matricer i (E.17) hører til elementet J.

Formel (E.17) omskrives til formel (E.18), hvor afhængigheden x_{α} undlades for at simplificere problemet. Ved omskrivningen sammenlignes de enkelte randes integraler, hvorved nogle af ledene udgår.

$$\Pi_{CM}\left(\left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\},\left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}\right) = \sum_{J=1}^{N_{ef}} \left(\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left(t \int_{A^{(J)}} \left[\boldsymbol{N}_{\beta}\right]^{T} \left[\boldsymbol{C}\right] \left[\boldsymbol{N}_{\beta}\right] dA\right) \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\} - \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left(t \int_{S^{(J)}} \left[\boldsymbol{F}_{\beta}\right]^{T} \left[\boldsymbol{N}_{\eta}\right] dS\right) \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\} - \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}^{T} \left(t \int_{S_{T}^{(J)}} \left[\boldsymbol{N}_{\eta}\right]^{T} \left[\boldsymbol{\overline{T}}\right] dS\right) \right)_{J}$$
(E.18)

Ligesom ved det LST elementet, jf. bilag D, indføres nu et antal simplificeringer givet ved Formel (E.19) til (E.21), hvorved formel (E.18) kan omskrives til (E.22).

$$[\mathbf{k}_{\beta\beta}] = t \int_{A^{(J)}} \left[\mathbf{N}_{\beta} \right]^{T} [\mathbf{C}] \left[\mathbf{N}_{\beta} \right] dA$$
(E.19)

$$\left\{\boldsymbol{k}_{\beta\eta}\right\} = t \int_{S^{(J)}} \left[\boldsymbol{F}_{\beta}\right]^{T} \left[\boldsymbol{N}_{\eta}\right] dS$$
(E.20)

$$\left\{\boldsymbol{r}_{\eta}\right\} = t \int_{S_{T}^{(J)}} \left[\boldsymbol{N}_{\eta}\right]^{T} \left[\boldsymbol{\bar{T}}\right] dS$$
(E.21)

$$\Pi_{CM}\left(\left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\},\left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}\right) = \sum_{J=1}^{N_{el}} \left(\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\beta}\right]\left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\} - \left\{\boldsymbol{v}_{\beta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\eta}\right]\left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\} - \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}^{T} \left\{\boldsymbol{r}_{\eta}\right\}\right)_{J}$$
(E.22)

Det ønskes at eliminere spændingsfeltets parametre, der har med den modificerede komplementære energi at gøre i formel (E.22), det vil sige $\{v_{\beta}\}$. Da sidebetingelsen for kontinuitet af spændingen langs elementets grænser, jf. formel (E.3), blev løsnet ved indførelse af Lagrangemultiplikatoren, er der ingen betingelser, som sammenholder spændingsfeltets parametre $\{v_{\beta}\}^{(J)}$ for element *J* direkte med spændingsfeltets parametre $\{v_{\beta}\}^{(K)}$ for element K. Derfor er det muligt at eliminere disse parametre på elementniveau, hvilket gøres ved at tage variationen af (E.22) med hensyn til størrelsen $\{v_{\beta}\}$, jf. formel (E.23).

$$0 = \delta \prod_{CM} \left(\left\{ \boldsymbol{v}_{\beta} \right\}, \left\{ \boldsymbol{v}_{\eta} \right\} \right)$$

$$(E.23)$$

$$0 = \sum_{J=1}^{N_{el}} \left(\left\{ \delta \boldsymbol{v}_{\beta} \right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\beta} \right] \left\{ \boldsymbol{v}_{\beta} \right\} - \left\{ \delta \boldsymbol{v}_{\beta} \right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\eta} \right] \left\{ \boldsymbol{v}_{\eta} \right\} \right)_{J}$$

$$(E.23)$$

$$0 = \left\{ \delta \boldsymbol{v}_{\beta} \right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\beta} \right] \left\{ \boldsymbol{v}_{\beta} \right\} - \left\{ \delta \boldsymbol{v}_{\beta} \right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\eta} \right] \left\{ \boldsymbol{v}_{\eta} \right\} \quad \forall \quad \left\{ \delta \boldsymbol{v}_{\beta} \right\}$$

$$\left\{ \boldsymbol{v}_{\beta} \right\} = \left[\boldsymbol{k}_{\beta\beta} \right]^{-1} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\eta} \right] \left\{ \boldsymbol{v}_{\eta} \right\}$$

I det endelig udtryk (E.23) antages det, at $[\mathbf{k}_{\beta\beta}]$ ikke er singulær, da en singulær $[\mathbf{k}_{\beta\beta}]$ medfører, at der påføres en spændingstilstand uden, at der produceres spændingsenergi i elementet. Dette antages ydermere opfyldt, såfremt spændingsinterpolationsmatricen i formel (E.13) vælges at være lineær. Det er nu muligt at omskrive (E.22) ud fra (E.23), hvorved den modificerede komplementære energi kun kommer til at afhænge af $\{v_{\eta}\}$, jf. formel (E.24).

$$\Pi_{CM}\left(\left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}\right) = \sum_{J=1}^{N_{el}} \left(\frac{1}{2} \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\eta}\right]^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\beta}\right]^{-1} \left[\boldsymbol{k}_{\beta\eta}\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\} - \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}^{T} \left\{\boldsymbol{r}_{\eta}\right\}\right)_{J}$$
(E.24)

Det vælges nu at indføre de to formler (E.25) og (E.26), hvorved formel (E.24) kan simplificeres til formel (E.27).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{*}_{\eta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\beta\eta} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\beta\beta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\beta\eta} \end{bmatrix}$$
(E.25)

$$\left\{\boldsymbol{r}_{\eta}^{*}\right\} = \left\{\boldsymbol{r}_{\eta}\right\} \tag{E.26}$$

$$\Pi_{CM}\left(\left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}\right) = \sum_{J=1}^{N_{el}} \left(\frac{1}{2} \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}^{T} \left[\boldsymbol{k}_{\eta\eta}^{*}\right] \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\} - \left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}^{T} \left\{\boldsymbol{r}_{\eta}^{*}\right\}\right)_{J}$$
(E.27)

Den modificerede komplementære energi, givet ved formel (E.27), summeres over samtlige elementer, hvorved formel (E.28), der gælder på systemniveau, kan opskrives.

$$\Pi_{CM}\left(\left\{\boldsymbol{v}_{\eta}\right\}\right) = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{V}_{\eta}\right\}^{T}\left[\boldsymbol{K}_{\eta\eta}^{*}\right]\left\{\boldsymbol{V}_{\eta}\right\} - \left\{\boldsymbol{V}_{\eta}\right\}^{T}\left\{\boldsymbol{R}_{\eta}^{*}\right\}$$
(E.28)

Tages variationen af (E.28) med hensyn til $\{V_{\eta}\}$, hvilken kræves lig nul, findes formel (E.29).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^*_{\eta\eta} \end{bmatrix} \{ \boldsymbol{V}_{\eta} \} = \{ \boldsymbol{R}^*_{\eta} \}$$
(E.29)

Ud fra bilag D, hvor det lineære tøjningselement blev beskrevet, kan formel (E.29) fortolkes. Det ses, at systemets knudeflytninger $\{V_{\eta}\}$ beregnes ud fra samme ligningssystem som ved systemer baseret på potentiel energi. $\{R^*_{\eta\eta}\}$ kan opfattes som lastvektor, mens $\{K^*_{\eta\eta}\}$ kan opfattes som systemets stivhedsmatrice.

E.3 Isoparametrisk Q4 element baseret på modificeret komplementær energi

Det vælges at benytte teorien for modificeret komplementær energi i bilag E.2 til at opbygge et isoparametisk Q4 spændingshybridt element. Q4 elementet i det fysiske plan er illustreret ved figur e.3.



Figur E.3: Illustration af spændingshybridt Q4 elementet i det fysiske koordinatsystem.

Det spændingshybride Q4 element transformeres til det dimensionsløse plan, jf. figur e.4.



Figur E.4: Illustration af spændingshybridt Q4 element i det dimensionsløse koordinatsystem.

Først bestemmes normalvektorerne for elementet, som samles i normalvektormatricen [n]. Denne opstilles på baggrund af elementet i det fysiske koordinatsystem, hvor den antager forskellige værdier for hver rand. For hver rand gælder formel (E.11) og situationen er vist på figur e.5.



Figur E.5: Illustration af spændingshybrid Q4 element med enhedsnormal på randen 2-3.

I bilag D er kædereglen benyttet til at beskrive sammenhængen mellem de fysiske og dimensionsløse koordinater og afledede heraf. Derved er det muligt at opstille formel (E.30), hvor $[\Im]$ er Jacobimatricen.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = [\mathfrak{I}]^{-1} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix}$$
(E.30)

I det fysiske rum er længden af randen givet ved (E.31).

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{E.31}$$

Enhedsnormalen kan derved opskrives ved (E.32), hvor samtlige af de fysiske koordinater er kendt.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx & 0 & dy \\ 0 & dy & dx \end{bmatrix} \frac{1}{dl}$$
(E.32)

Rent programmeringsmæssigt viser (E.30) sig at være den bedst mulige måde at definere normalvektormatricen på i stedet for at definere den ud fra de fysiske knudekoordinater. Dette skyldes, at elementerne drejes ved opbygning af de forskellige modeller, hvorved normalvektorens retning ændres. Ved bestemmelse af Jacobideterminanten for randen viser det sig derimod programmeringsmæssigt tilladeligt at bestemme størrelsen ud fra knudekoordinaterne. Jacobideterminanten for randen er generelt defineret som forholdet mellem
randlængden i det fysiske og dimensionsløse rum, jf. formel (E.33). Her vælges det som nævnt at benytte (E.34) og (E.35) til at definere den fysiske længde.

$$\det\left(\left[\mathfrak{S}_{s}\right]\right) = \frac{dl}{2} \tag{E.33}$$

$$dx = x_2 - x_1 \tag{E.34}$$

$$dy = y_2 - y_1$$
(E.35)

Efterfølgende opstilles spændingsinterpolationsmatricen, $[N_{\beta}(x_{\alpha})]$, hvor det vælges, at forskydningsspændingerne er konstante over hele elementet, mens normalspændingen varierer lineært. På baggrund af det fysiske koordinatsystem vælges spændingsinterpolationsmatricen til (E.36), hvilken opfylder sidebetingelsen givet ved (E.2).

$$\begin{bmatrix} N_{\beta}(x_{\alpha}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(E.36)

For at få estimeret knudekoordinaterne i formel (E.36) benyttes funktionsmatricen, jf. formel (E.37) og (E.41).

$$\begin{bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$$
(E.37)

hvor

 $\{x\}$ beskriver knudekoordinaterne for et punkt inde i elementet

 $\{c\}$ beskriver de forskrevne knudekoordinater

Ud fra formel (E.36) er det muligt at bestemme [$k_{\beta\beta}$] givet ved formel (E.19), som derved kommer til at afhænge af de dimensionsløse koordinater, jf. formel (E.38).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\beta\beta} \end{bmatrix} = t \int_{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{\beta} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{\beta} \end{bmatrix} \mathfrak{I} d\xi d\eta$$
(E.38)

I udtrykket indgår ydermere fleksibilitetsmatricen, [C], der er givet ved formel (E.39).

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$
(E.39)

hvor

G er forskydningsmodulen.

Da det via CALFEM ønskes at bestemme $[\mathbf{k}_{\beta\beta}]$ numerisk ved hjælp af Gausspunkter, omskrives formel (E.38) til (E.40), hvor vægten og Jacobideterminanten introduceres.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\beta\beta} \end{bmatrix} = t \sum_{J=1}^{Nel} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{\beta} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{\beta} \end{bmatrix} \mathfrak{W}_{i} d\xi d\eta$$
(E.40)

Jacobideterminanten bestemmes på tilsvarende vis som i bilag D, blot med en ny funktionsmatrice som basis, ligesom ved et almindeligt isoparametrisk Q4 element. Denne er givet ved (E.41).

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$
(E.41)

hvor

$$\begin{split} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{split}$$

Det vælges at benytte fire Gausspunkter til approksimation af integralet over arealet. Gausspunkterne er placeret inde i selve elementet, jf. figur e.6, hvor deres placering ydermere er angivet. Den dertilhørende vægt W_i er 1.



Figur E.6: Q4 element i det dimensionsløse plan, hvor de fire Gausspunkter er markeret.

Efterfølgende er det matricen $[k_{\beta\eta}]$, som ønskes estimeret. Denne er givet ved formel (E.20). Her bestemmes $[F_{\beta}]$ som normalvektormatricen multipliceret med spændingsinterpolationsmatricen, jf. formel (E.42).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{\beta} \end{bmatrix}$$
(E.42)

Flytningsinterpolationsmatricen, $[N_{\eta}]$, bestemmes ved at tage udgangspunkt i funktionsmatricen, jf. formel (E.41). Ydermere er matricen forskellig for hver rand og opstilles på baggrund af det dimensionsløse koordinatsystem, hvor randbetingelser benyttes. Således er eksempelvis η lig minus 1 på randen 1 til 2. På baggrund heraf findes formel (E.43).

$$\begin{bmatrix} N_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rand } 2-3 \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \text{ rand } 3-4 \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\eta & 0 \\ 0 & 1-\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\eta \end{bmatrix} \text{ rand } 4-1 \end{cases}$$
(E.43)

Dernæst omskrives $[\mathbf{k}_{\beta\eta}]$, da elementet beskrives i det dimensionsløse koordinatsystem, jf. formel (E.44), idet der tages udgangspunkt i (E.33) til at beskrive randen *dS*.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\beta\eta} \end{bmatrix} = t \iint_{S} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\beta} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{\eta} \end{bmatrix} \sqrt{dx^{2}} + dy^{2}$$

$$(E.44)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{\beta\eta} \end{bmatrix} = t \iint_{S} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\beta} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{\eta} \end{bmatrix} \det(\mathfrak{I}_{s})$$

Ved approksimation af (E.44) indføres vægten, W_i , som tidligere beskrevet. Her er det vigtigt at bemærke, at det er randintegralet, der approksimeres og ikke arealintegralet. Derved benyttes to Gausspunkter per rand, hvor hver rand, som tidligere nævnt, har nogle randbetingelser, jf. figur e.7, der indsættes i (E.44).



Figur E.7: Q4 element i det dimensionsløse plan, hvor de 2 Gausspunkter pr. rand er markeret.

Endeligt er det muligt at bestemme den samlede stivhedsmatrice givet ved formel (E.25). Efter beregning af de enkelte elementers stivhedsmatricer $[k_{\eta\eta}]$, lægges disse sammen til systemets samlede stivhedsmatrix $[K^*_{\eta\eta}]$, der anvendes i formel (E.29), jf. cd-bilag.

Ud fra systemets stivhedsmatrice er det nu muligt at bestemme samtlige flytninger, og samtidig er det ud fra de fundne parametre muligt at finde spændingerne. Dette gøres ved at tage udgangspunkt i formel (E.23), som bestemmes entydigt for hvert element ud fra knudeflytningerne { v_{η} }. Derved kan spændingerne endeligt findes ved formel (E.45).

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \left[\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\beta}}\right] \{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\beta}}\}$$
(E.45)

Forsøgsrapporter

Forsøg 1 Aluminiums materialeparametre

I dette forsøg bestemmes elasticitetsmodulen, E, forskydningsmodulen, G, og Poissons forhold, v, på baggrund af et trykforsøg foretaget i laboratoriet for bærende konstruktioner. Ved statistisk bearbejdning er [Ayyub et. al, 1997] anvendt som kilde.

1.1 Fremgangsmåde

Materialeparametrene bestemmes ved at belaste en klods til enakset tryk og måle sammenhørende værdier af længdetøjningen, tværtøjningen samt den påførte last. Klodsen er en aluminiumsklods med dimensionerne $30 \times 30 \times 60$ mm. Tøjningerne måles ved hjælp af straingages placeret på siderne af klodsen, to i længderetningen og to i tværretningen, jf. figur 1.1.



Figur 1.1: Forsøgsemnet placeret i prøvemaskinen med påmonterede straingages.

Straingagene placeres i centerlinien i henholdsvis langsgående og tværgående retning. Straingagene er placeret parvis på modstående sider, hvorved det kan kontrolleres om belastningen er centralt placeret. Samtidig er det muligt at finde de gennemsnitlige tøjninger. Belastningen findes ved aflæsning af et voltmeter tilsluttet prøvemaskinen, som er kalibreret så 10 V svarer til 60 kN. De fire gages placeres hver i en kvart wheatstone-bro, jf. bilag A og tilsluttes en strainindikator, hvorved de fire tøjningsmål kan bestemmes.

Da klodsen belastes med enakset tryk uden sidefastholdelse opnås en enakset spændingstilstand. Hookes lov ved plan spændingstilstand er givet ved formel (1.1).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$
(1.1)

Akseretninger er vist på figur 1.2.



Figur 1.2: Akseretninger ved bestemmelse af materialeparametre.

Idet σ_{yy} er nul for enakset spændingstilstand, kan Poissons forhold bestemmes ved formel (1.2).

$$\mathcal{E}_{yy} = -\mathcal{V} \mathcal{E}_{xx} \tag{1.2}$$

Til bestemmelse af elasticitetsmodulen anvendes (1.3), som er første ligning i formel (1.1).

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - v^2} \left(\varepsilon_{xx} + v \, \varepsilon_{yy} \right) \tag{1.3}$$

Formel (1.2) indsættes i formel (1.3) og elasticitetsmodulen kan beregnes ved kendskab til ε_{xx} ud fra formel (1.4).

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \tag{1.4}$$

Forskydningsmodulen bestemmes ud fra formel (1.5).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.5}$$

1.2 Resultater

Resultaterne fra forsøget er vist i tabel 1.1, hvor det ses, at tøjningsværdierne for be- og aflastning næsten er identiske og derfor benyttes middelværdier for de relevante belastningstrin, jf. tabel 1.2. Det bemærkes samtidig, at gage 1 og gage 4 måler cirka 10% højere værdier end henholdsvis gage 2 og gage 3, se afsnit 1.3.

-						
	U	Р	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{yy}	\mathcal{E}_{yy}
			Gage 1	Gage 2	Gage 3	Gage 4
	[V]	[kN]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]
	0,00	0	1	3	0	-2
	*0,00	0	-2	-6	0	-2
	0,98	5,9	-80	-73	16	22
	1,98	11,9	-171	-146	44	51
	2,98	17,9	-261	-229	68	80
	3,98	23,9	-349	-313	92	108
	*3,98	23,9	-345	-317	82	106
	4,96	29,8	-432	-397	118	137
	5,96	35,8	-520	-480	143	165
	6,96	41,8	-608	-562	168	194
	*6,96	41,8	-615	-564	161	193
	7,95	47,7	-700	-640	194	220
	8,95	53,7	-791	-726	221	244
	9,95	59.7	-878	-808	250	272

 Tabel 1.1: Forsøgsresultater fra belastningsforsøget. * angiver at værdierne er målt ved aflastning.

Trin	Р	$\sigma_{xx} = P / A$	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{yy}
#	[kN]	[MPa]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]
0	0	0	-1	-1
1	5,9	-6,5	-77	19
2	11,9	-13,2	-159	48
3	17,9	-19,9	-245	74
4	23,9	-26,5	-331	97
5	29,8	-33,1	-415	128
6	35,8	-39,7	-500	154
7	41,8	-46,4	-587	179
8	47,7	-53,0	-670	207
9	53,7	-59,7	-759	233
10	59,7	-66,3	-843	261

Tabel 1.2: Middelværdier af målte værdier fra belastningsforsøget.

Elasticitetsmodulen og Poissons forhold bestemmes ved lineær regression ud fra formel (1.4) og (1.2) henholdsvis efter modellen formel (1.6).

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x \tag{1.6}$$

1.2.1 Elasticitetsmodul

Skrives formel (1.4) på formen (1.6) fås formel (1.7).

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{f_E} + E\varepsilon_{xx} \tag{1.7}$$

hvor

 f_E er en systematisk eller statistisk fejl ved forsøget

I formel (1.7) er σ_{xx} den afhængige variabel og ε_{xx} den uafhængige, men i forsøget er det omvendt, hvorved modellen udtrykkes som formel (1.8).

$$\hat{\varepsilon}_{xx} = f_E + \frac{1}{E}\sigma_{xx} \tag{1.8}$$

hvor

 $\hat{\varepsilon}_{xx}$ er tøjningen fra den forventede model, formel (1.8)

Der anvendes mindste kvadraters metode til bestemmelse af regressionskoefficienterne. Fejlen e mellem den målte og den forventede værdi er givet ved formel (1.9).

$$e = \hat{\varepsilon}_{xx} - \varepsilon_{xx} \tag{1.9}$$

Den mindste sum af kvadratet på fejlene er givet ved formel (1.10).

$$F = \min \sum \left(\hat{\varepsilon}_{xx} - \varepsilon_{xx}\right)^2 \tag{1.10}$$

Indsættes formel (1.8) i (1.10) fås formel (1.11)

$$F = \min \sum \left(f_E + \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \varepsilon_{xx} \right)^2$$
(1.11)

Differentieres formel (1.11) partielt med hensyn til 1/E og f, fås to ligninger med to ubekendte. Løses disse findes regressionskoefficienterne 1/E og f ved (1.12) og (1.13).

$$\frac{1}{E} = \frac{\sum \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} - \frac{1}{n} \sum \sigma_{xx} \sum \varepsilon_{xx}}{\sum \sigma_{xx}^2 - \frac{1}{n} (\sum \sigma_{xx})^2}$$
(1.12)

$$f_E = \frac{1}{n} \left(\sum \mathcal{E}_{xx} - \frac{1}{E} \sum \sigma_{xx} \right)$$
(1.13)

De relevante værdier og summer er vist i tabel 1.3.

Trin #	$\sigma_{_{xx}}$	\mathcal{E}_{xx}	$\sigma_{_{xx}}{}^{^2}$	\mathcal{E}_{xx}^{2}	$\mathcal{E}_{xx}\sigma_{xx}$	$\hat{\varepsilon}_{xx}$	$\left(\hat{\varepsilon}_{xx}-\varepsilon_{xx}\right)^2$	$\left(\sigma_{xx}-\overline{\sigma}_{xx}\right)^2$
		[10 ⁻⁶]		[10 ⁻⁹]	[10 ⁻³]	[10 ⁻⁶]	$[10^{-12}]$	
0	0	-1	0	0,001	0,0	6,4	54,4	1097,01
1	-6,5	-77	42,7	6	0,5	-77,1	0,4	706,92
2	-13,2	-159	174,2	25	2,1	-162,3	14,4	396,85
3	-19,9	-245	394,7	60	4,9	-247,5	6,1	175,68
4	-26,5	-331	704,0	110	8,8	-332,7	2,8	43,40
5	-33,1	-415	1093,4	172	13,7	-416,1	2,7	0,003
6	-39,7	-500	1578,7	250	19,9	-501,3	1,8	43,72
7	-46,4	-587	2153,0	345	27,2	-586,5	0,5	176,33
8	-53,0	-670	2809,0	449	35,5	-670,8	0,7	395,17
9	-59,7	-759	3560,1	575	45,3	-756,0	6,1	704,66
10	-66,3	-843	4400,1	711	55,9	-841,2	3,2	1103,04
Σ	-364,3	-4585	16910	2702	213,7	-4585	93	4842,8

 Tabel 1.3: Værdier til lineær regression af elasticitetsmodulen.

Indsættes værdierne i tabel 1.3 i formlerne (1.12) og (1.13) fremkommer følgende værdier.

$$\frac{1}{E} = 1,28 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^2 \text{N}$$
$$f_E = 6,4 \cdot 10^{-6}$$

I figur 1.3 er måleværdier sammenholdt med regressionslinien med de ovenstående værdier.



Figur 1.3: Målte værdier og regressionslinie for elasticitetsmodul.

I det følgende bestemmes et 95% konfidensinterval ($\gamma = 0,95$) for *l/E* og *e* ved (1.14) og (1.15).

$$\frac{1}{E} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} S_{e, \frac{1}{E}}$$
(1.14)

$$f_E \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-2} S_{e,f}$$
 (1.15)

hvor

ter en værdi fundet i en t-fordeling for
$$\alpha/2$$
 og $n-2$ frihedsgrader α er signifikansniveauet $(1-\gamma)$ $S_{e,\frac{1}{E}}$ er standardafvigelsen givet ved formel (1.16) $S_{e,f}$ er standardafvigelsen givet ved formel (1.17)

$$S_{e,\frac{1}{E}}^{2} = \frac{S_{e}^{2}}{\sum (\sigma_{xx} - \overline{\sigma}_{xx})^{2}}$$
(1.16)

$$S_{e,f}^{2} = \frac{S_{e}^{2} \sum \sigma_{xx}^{2}}{n \sum (\sigma_{xx} - \overline{\sigma}_{xx})^{2}}$$
(1.17)

hvor

 $\overline{\sigma}_{xx}$ er middelværdien af σ_{xx} S_e^2 er variansen givet ved formel (1.18)

$$S_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum \left(\hat{\varepsilon}_{xx} - \varepsilon_{xx}\right)^2 \tag{1.18}$$

Indsættes værdierne fra tabel 1.3 i formlerne(1.16) til (1.18), bestemmes følgende.

$$S_e^2 = 10, 3 \cdot 10^{-12}$$
$$S_{e,\frac{1}{E}} = 46, 2 \cdot 10^{-9}$$
$$S_{e,f} = 1, 8 \cdot 10^{-6}$$
$$t_{0,025;9} = 2,262$$

Herved bliver konfidensintervallerne.

 $\frac{1}{E} = 1,28 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}} \pm 0,01 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}$ 77626 MPa $\leq E \leq$ 78906 MPa $f_E = 6,4 \cdot 10^{-6} \pm 4,1 \cdot 10^{-6}$ 2,3 µstrain $\leq f_E \leq$ 10,5 µstrain

Det bemærkes at konfidensintervallet for elasticitetsmodulen er meget snævert og derfor anvendes middelværdien i intervallet for elasticitetsmodulen.

E = 78262 MPa

Ligeledes er konfidensintervallet for fejlen, f_E , meget snævert set i forhold til usikkerheden på værdierne i tabel 1.1, og da der i afsnit 1.2.3 sammenlignes med resultater fra andre grupper forventes, at denne fejl kan negligeres.

1.2.2 Poissons forhold

Poissons forhold findes efter samme metode som elasticitetsmodulen, hvor formel (1.2) kombineres med formel (1.6) og giver formel (1.19).

$$\hat{\varepsilon}_{yy} = f_{\nu} + (-\nu)\varepsilon_{xx} \tag{1.19}$$

hvor

 f_{ν} er en systematisk eller statistisk fejl ved forsøget

I afsnit 1.2.1 er ε_{xx} den afhængige variabel og da fejlen på denne størrelse antages 0, vælges ε_{xx} i det følgende at være den uafhængige variabel og ε_{yy} den afhængige, hvorfor (1.19) benyttes i det følgende.

Regressionskoefficienterne -v og e findes ved formel (1.20) og (1.21), hvor de relevante summer er vist i tabel 1.4.

$$-\nu = \frac{\sum \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \frac{1}{n} \sum \varepsilon_{xx} \sum \varepsilon_{yy}}{\sum \varepsilon_{xx}^{2} - \frac{1}{n} (\sum \varepsilon_{xx})^{2}}$$
(1.20)

$$f_{\nu} = \frac{1}{n} \Big(\sum \varepsilon_{yy} + \nu \sum \varepsilon_{xx} \Big)$$
(1.21)

Trin #	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{yy}	\mathcal{E}_{xx}^{2}	\mathcal{E}_{yy}^{2}	$\mathcal{E}_{yy} \mathcal{E}_{xx}$	$\hat{arepsilon}_{yy}$	$\left(\hat{\varepsilon}_{yy}-\varepsilon_{yy} ight)^{2}$	$\left(\varepsilon_{xx}-\overline{\varepsilon}_{xx}\right)^2$
	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁹]	[10 ⁻⁹]	[10 ⁻⁹]	[10 ⁻⁶]	$[10^{-12}]$	[10 ⁻⁹]
0	-1	-1	0	0	0,001	-2,7	2,9	172,9
1	-77	19	5,9	0,4	-1,5	20,9	3,5	115,8
2	-159	47,5	25,1	2,3	-7,5	46,4	1,1	66,7
3	-245	74	60,0	5,5	-18,1	73,4	0,3	29,5
4	-331	97	109,6	9,4	-32,1	100,3	10,7	7,4
5	-415	127,5	171,8	16,3	-52,8	126,3	1,4	0,01
6	-500	154	250,0	23,7	-77,0	153,0	1,0	6,9
7	-587	179	344,9	32,0	-105,1	180,2	1,5	29,0
8	-670	207	448,9	42,8	-138,7	206,0	0,9	64,1
9	-759	232,5	575,3	54,1	-176,4	233,6	1,3	116,7
10	-843	261	710,6	68,1	-220,0	260,0	1,0	181,6
Σ	-4585	1397,5	2702,1	254,5	-829,2	1397,5	25,5	790,8

 Tabel 1.4: Værdier til lineær regression af Poissons forhold.

Indsættes værdierne fra tabel 1.4 i formlerne (1.20) og (1.21) bestemmes følgende værdier.

 $-\nu = -0, 3$

$$f_v = 6, 4 \cdot 10^{-6}$$

I figur 1.4 er måleværdierne sammenholdt med regressionslinien for ovenstående værdier.



Figur 1.4: Målte værdier og regressionslinie for Poissons forhold.

I det følgende findes et 95% konfidensinterval ($\gamma = 0,95$) for $-\nu$ og *e* efter samme fremgangsmåde som i afsnit 1.2.1 hvorved følgende konfidensintervaller bestemmes.

$$-v = -0.312 \mp 0.0043$$

 $0.3077 \le v \le 0.3163$
 $f_v = -3.10^{-6} \pm 2.1.10^{-6}$
 $-5.1 \,\mu \text{strain} \le f_v \le -0.9 \,\mu \text{strain}$

Det bemærkes at konfidensintervallerne er meget snævre og derfor anvendes den midterste værdi i intervallet for Poissons forhold.

v = 0,312

Ligeledes er konfidensintervallet for fejlen, f_v , meget snævert set i forhold til usikkerheden på værdierne i tabel 1.1, og da der i afsnit 1.2.3 sammenlignes med resultater fra andre grupper forventes at denne fejl kan negligeres.

1.2.3 Resultater fra øvrige grupper

De øvrige grupper har lavet samme forsøg og forsøgsresultaterne er vist i tabel 1.5 til tabel 1.8. Alle forsøg er foretaget på det samme prøvelegeme og med samme forsøgsopstilling, hvorfor middelværdier af resultaterne anvendes, og nulpunktsfejlene f_E og f_v negligeres.

U	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{yy}	\mathcal{E}_{yy}
	Gage 1	Gage 2	Gage 3	Gage 4
	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]
-0,01	0	1	-2	-1
0,98	-87	-75	25	18
1,98	-161	-172	52	44
2,98	-234	-267	78	71
3,98	-311	-357	104	97
4,96	-395	-443	131	126
5,97	-487	-531	155	154
6,96	-567	-623	183	180
7,95	-648	-712	210	209
8,96	-732	-801	237	237
9,96	-816	-891	265	254
*6,96	-568	-624	178	174
*3,98	-324	-356	97	90
*-0,01	-12	-8	-1	-3

 Tabel 1.5: Forsøgsresultater fra gruppe C125. * angiver aflastning.

U	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{yy}	\mathcal{E}_{yy}
	Gage 1	Gage 2	Gage 3	Gage 4
	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]
0,00	-3	0	5	5
0,98	-71	-92	20	33
1,98	-162	-165	41	62
2,98	-251	-243	65	91
3,98	-339	-322	94	120
4,96	-423	-405	117	148
5,96	-509	-488	144	177
6,96	-594	-570	167	206
7,95	-680	-652	193	235
8,95	-796	-736	220	263
9,96	-855	-819	247	292
*6,96	-602	-579	170	207
*3,98	-335	-331	91	118
*0,00	4	-5	7	7

 Tabel 1.6: Forsøgsresultater fra gruppe C127. * angiver aflastning.

U	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{yy}	\mathcal{E}_{yy}
	Gage 1	Gage 2	Gage 3	Gage 4
	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]	[10 ⁻⁶]
0,00	-2	-6	-3	-5
0,65	-47	-81	9	2
1,32	-100	-137	24	12
1,98	-161	-183	43	27
2,65	-224	-234	62	43
3,32	-277	-288	81	60
3,97	-332	-350	100	75
4,64	-387	-398	118	90
5,31	-445	-449	136	106
5,96	-502	-503	155	123
6,63	-558	-556	175	140
7,29	-617	-615	194	158
7,95	-677	-673	213	176
8,62	-734	-728	232	193
9,29	-790	-795	251	213
9,96	-851	-850	270	228
*6,63	-569	-585	176	140
*5,31	-463	-477	136	103
*3,32	-284	-311	77	53
*0,65	-36	-101	2	-6
*0,00	3	-35	-13	-14

U	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{xx}	\mathcal{E}_{yy}	\mathcal{E}_{yy}
	Gage 1 [10 ⁻⁶]	Gage 2 [10 ⁻⁶]	Gage 3 [10 ⁻⁶]	Gage 4 [10 ⁻⁶]
0,00	-5	2	1	-3
0,98	-99	-61	17	22
1,98	-176	-152	39	51
2,98	-253	-248	64	80
3,97	-335	-338	89	108
4,96	-413	-425	115	137
5,96	-494	-513	141	165
6,96	-575	-600	160	187
7,96	-657	-687	188	217
8,95	-737	-775	216	247
9,96	-824	-864	240	275
*6,96	-585	-605	161	191
*3,98	-336	-336	83	102
*0,00	-7	-2	0	-4

 Tabel 1.8: Forsøgsresultater fra gruppe C130. * angiver aflastning.

Gruppe	E [MPa]	ν
C129	78266	0,312
C125	77854	0,311
C127	78775	0,317
C128	78697	0,310
C130	79315	0,314
Middelværdi	78576	0,313
Spredning	543	0,003
95% konfidensinterval	78576±756	0,313±0,004

Beregninger af elasticitetsmodul og Poissons forhold følger samme fremgangsmåde som i afsnit 1.2.1 og 1.2.2, hvilket giver resultaterne i tabel 1.9.

Tabel 1.9: Middelværdi af elasticitetsmodul og Poissons forhold.

Da konfidensintervallerne er snævre anvendes følgende værdier

E = 78600 MPav = 0,313

I figur 1.5 er måleresultaterne afbildet sammen med middelværdien af elasticitetsmodulen, og i figur 1.6 er måleresultaterne afbildet sammen med middelværdien af Poissons forhold. Det ses, at elasticitetsmodulen stemmer godt overens med måleværdierne. Det samme gør Poissons forhold, hvor linien kan parallelforskydes, så den passer med de nederste punkter.



Figur 1.5: Måleresultater afbildet i forhold til middelværdien af elasticitetsmodulen.



Figur 1.6: Måleresultater afbildet i forhold til middelværdien af Poissons forhold.

1.2.4 Forskydningsmodul

Forventningsværdien af forskydningsmodulen bestemmes med formel (1.5) og med resultaterne for elasticitetsmodulen og Poissons forhold bliver forskydningsmodulen.

$$G = \frac{78600 \text{ MPa}}{2(1+0,313)} = 29930 \text{ MPa}$$

1.3 Usikkerheder

De primære usikkerheder ved dette forsøg er placeringen af straingages på klodsen og placeringen af klodsen i prøvemaskinen. Såfremt straingages ikke er placeret lige overfor hinanden, kan de vise forskellige tøjningsværdier, hvilket var tilfældet, jf. tabel 1.1. Denne forskel kan ligeledes skyldes, at den øverste kæbe i prøvemaskinen kan rotere lidt, og at der derfor kan komme et skævt tryk på klodsen. Dette vurderes at være den afgørende faktor for de forskellige værdier i tabel 1.1, men idet der regnes videre med middelværdier af tøjningerne, minimeres denne fejl. En anden årsag til usikkerhederne på resultaterne kan være usikkerhed ved opmåling af prøveemne, men da alle grupper har udført forsøget med det samme prøveemne og samme forsøgsopstilling, er det kun størrelsen af elasticitetsmodulen, der kan være en lille fejl ved. Fejl på selve straingagene er ligeledes en mulighed, hvilket imidlertid ikke anses for værende sandsynligt.

Det er i det foregående vist, at intervallerne, som målte værdier af elasticitetsmodulen og Poissons forhold med 95% sandsynlighed, ligger indenfor, er meget snævre. Samtidig er intervallerne på fejlen e i de to tilfælde ligeledes meget snævert og drejer sig kun om få mikrostrain.

1.4 Materialeparametre

Følgende materialeparametre benyttes ved de numeriske og analytiske beregninger.

E = 78600 MPav = 0,313G = 29930 MPa

Forsøg 2 Enhedsceller

Det følgende forsøg omhandler bestemmelse af materialeegenskaber ved benyttelse af enhedscellen. Flytningsmålere er placeret på to modstående sider af elementerne, hvor de måler i samme retning, hvilket bevirker, at Poissons forhold ikke kan bestemmes. Forsøgselementerne er vist på figur 2.1.



Figur 2.1: Forsøgselementer til bestemmelse af elasticitetsmodul ved forskellige porøsiteter.

Forsøgselementerne er udformet med dimensionerne $64 \times 64 \times 20$ mm med borede huller med diameteren 8 og 14 mm, hvorved porøsiteten bliver henholdsvis 0,20 og 0,60. Porøsiteten defineres som volumenforholdet mellem element uden porøsitet og element med porøsitet. Af figur 2.1 fremgår to huller til måling af flytninger, hvor placeringen fremgår af figur 2.2.



Figur 2.2: Enhedscelle, henholdsvis porøsitet 0,20 og 0,60, med angivelse af placering for flytningsmåler.

2.1 Fremgangsmåde

Elasticitetsmodulen bestemmes ved enakset tryk af de, på figur 2.1, viste forsøgselementer. Det enkelte forsøgselement indsættes mellem to endeplader, der holdes sammen af bolte, hvorved sideudvidelser ikke kan forekomme. Forsøgsopstillingen er skitseret på figur 2.3.



Figur 2.3: Forsøgsopstilling til bestemmelse af elasticitetsmodul for porøse forsøgselementer.

Forsøgsopstillingen kan give usikkerheder, da belastning af boltene giver en opspændingskraft, hvilket kan have betydning for belastning- og aflastningskurver. Ligeledes er usikkerheden ved dette forsøg, at den opspændte enhedscelle får en tøjning i belastningens retning og derved en friktion mellem opspændingspladerne. For at minimere disse usikkerheder benyttes, i det følgende, udelukkende belastningskurver, cd-bilag.

Tøjningen for forsøgselementerne bestemmes som den relative sammentrykning over en afstand på 32 mm, mens spændingen beregnes ved kraft pr. areal, da prøveemnet betragtes som et homogent materiale. Dataopsamling foretages digitalt, hvor måling af henholdsvis tid, belastning og flytning foretages fem gange i sekundet. Efterfølgende databehandling udføres ved lineær regression, analogt til den massive klods, hvorfor der henvises til forsøg 1 for gennemgang. Endvidere er foretaget kalibrering af flytningsmålere, hvilket er beskrevet i forsøg 3.

2.2 Resultater

Forsøgselementet med porøsiteten 0,20 belastes med 0 - 40 kN, hvor forsøgsresultaterne er illustreret på figur 2.4.



Figur 2.4: Forsøgsresultater for enhedscelle med porøsitet 0,20.

Databehandling foretages, ved lineær regression, analogt til bestemmelse af materialeparametrene for den massive klods, hvorfor udelukkende resultaterne er præsenteret i tabel 2.1, cd-bilag.

	Porøsitet 0,2
Elasticitetsmodul, E	44500 MPa
Signifikansniveau, α	0,05
Konfidensinterval	44006 MPa $\leq E \leq$ 45005 MPa
Systematisk fejl, f	$1,115 \cdot 10^{-6}$
Konfidensinterval	$1,11 \cdot 10^{-6} \le f \le 1,12 \cdot 10^{-6}$
Målinger	276
R^2	1,0

Tabel 2.1: Forsøgsresultater for prøveelement med porøsitet 0,20.

Forsøgselementet med porøsiteten 0,60 er belastet med tre belastninger, henholdsvis 0 - 6 kN, 0 - 10 kN og 0 - 15 kN. Disse tre belastninger beregnes sammen, da prøveelementet er det samme og ingen opstillingsændringer er foretaget. Forsøgsresultaterne er angivet i figur 2.5.



Figur 2.5: Forsøgsresultater for enhedscelle med porøsitet 0,60.

Resultaterne for databehandlingen er præsenteret i tabel 2.2, cd-bilag.

	Porøsitet 0,6
Elasticitetsmodul, E	15247 MPa
Signifikansniveau, α	0,05
Konfidensinterval	$15122 \text{ MPa} \le E \le 15375 \text{ MPa}$
Systematisk fejl, f	$1,73 \cdot 10^{-6}$
Konfidensinterval	$1,65 \cdot 10^{-6} \le f \le 1,80 \cdot 10^{-6}$
Målinger	352
R^2	0,99

 Tabel 2.2: Forsøgsresultater for prøveelement med porøsitet 0,60.

2.3 Usikkerheder

Ved benyttelse af prøveelementer med borede huller kan der forekomme variationer i størrelse og placering af disse, hvilket bevirker, at der kan forekomme fejl ved beregning af tøjning og porøsitet. Ligeledes kan opstillingen af elementet og trykmaskinens belastning medføre en excentricitet af tryk-belastningen. Flytningsmålerne kan måle forkert, hvilket minimeret ved kalibrering af disse og benyttelse af middelflytning for elementets sider.

Forsøg 3 Kalibrering af flytningsmålere

Til bestemmelse af flytningerne for henholdsvis enhedscellen, den massive og porøse cirkelskive og cirkelring anvendes flytningsmålere. Idet flytningsmålerne kan være behæftet med fejl, er disse kalibreret. Kalibreringen er foretaget ved hjælp af en mikrometerskrue i intervallet fra -2,200 mm til 2,200 mm. Der anvendes fire flytningsmålere, 50014, 81941, 98770 og 98771.

3.1 Kalibrering af flytningsmåler 50014

Eksakt	Målt med flyt-
	ningsmåler
[mm]	[mm]
-2,200	-2,1600
-2,000	-1,9580
-1,800	-1,7640
-1,600	-1,5650
-1,400	-1,3680
-1,200	-1,1760
-1,000	-0,9752
-0,800	-0,7829
-0,600	-0,5852
-0,400	-0,3888
-0,200	-0,1956
0,000	0,0046
0,200	0,1976
0,400	0,3940
0,600	0,5905
0,800	0,7816
1,000	0,9820
1,200	1,1740
1,400	1,3700
1,600	1,5660
1,800	1,7570
2,000	1,9190
2,200	2,0870

Resultaterne for kalibreringen af flytningsmåler 50014 er vist i tabel 3.1.

 Tabel 3.1: Resultater fra kalibrering af flytningsmåler 50014.

For at finde en sammenhæng mellem målingerne og de eksakte værdier er de eksakte værdier plottet i forhold til fejlen. Herefter er den bedste rette linie fundet ved lineær regression, jf. figur 3.1. Fejlen i de to sidste målinger falder udenfor med cirka en tiendedel mm, hvilket kunne tyde på en menneskelig fejl, og derfor er der ved regressionen set bort fra disse.



Figur 3.1: Resultater samt lineær regression af 50014.

Kalibreringskurven er fremstillet ved lineærregression og er givet ved formel (3.1).

$$y_{50014} = 1,0272 \cdot x + 0,0043 \tag{3.1}$$

hvor

*y*₅₀₀₁₄ er den korrekte værdi [mm] *x* er den målte værdi [mm]

Fremgangsmåden til bestemmelse af kalibreringen af de tre andre flytningsmåler er identisk med ovenstående, og derfor er disse vedlagt som cd-bilag. Resultaterne fremgår af formel (3.2), (3.3) og (3.4).

$y_{81941} = 1,0123 \cdot x - 0,0009 \tag{(1)}$	3.2	2)
---	-----	---	---

$$y_{98770} = 1,0069 \cdot x - 0,0146 \tag{3.3}$$

 $y_{98771} = 1,0162 \cdot x + 0,0075 \tag{3.4}$

3.2 Vurdering

Resultaterne fra kalibreringerne viser, at ingen af flytningsmålingerne har fejl større end 2%. Idet alle regressionskurverne viser, at der er lineær sammenhæng mellem de eksakte værdier, og de målte skal der tages højde for fejlen i målingerne på cirkelskiverne og cirkelringene.

Forsøg 4 Massiv cirkelskive

I dette forsøg bestemmes flytninger og tøjninger i den massive cirkelskive for en given kraft med henblik på en senere sammenligning med de numeriske og de analytiske resultater. Forsøgsemnet er vist på figur 4.1, hvor lasten påføres øverst og nederst gennem tilpassede stålklodser. Målingerne foretages i en række enkeltgages, rosettegages samt flytningsmålere. Den ene flytningsmåler er placeret i kraftens retning gennem cirklens midte, jf. figur 4.1, og den anden placeret på modsatte side. Den nøjagtige placering af flytningsmålerne er vist på figur 4.3, og placeringen af gages er vist på figur 4.2.



Figur 4.1: Massiv cirkelskive med flytningsmåler og gages.

Alle rosettegages har en gagefaktor, K_g , på 2,14 ± 1% og alle enkeltgages har gagefaktoren, K_g på 2,15 ± 1%. Disse tal anvendes ikke i det følgende, men er angivet til en eventuel rekonstruktion af forsøget.

4.1 Fremgangsmåde

Til bestemmelse af tøjninger er der påsat en række gages, jf. figur 4.2.



Figur 4.2: Placering af gages på massiv cirkelskive med lasten P påført gennem tilpasset stålelement.

De numeriske og de analytiske beregninger er gennemført med en punktlast. Da punktlaster medfører lokale unøjagtigheder er gagene flyttet et stykke væk fra lastens angrebspunkt. Gage nummer 2, 3, 6 og (7) er placeret gennem y-aksen, idet den analytiske beregning ved hjælp af både den komplekse funktionsteori samt Fourier-rækker antyder, at normalspændingerne i x-retningen er konstante i et lodret snit gennem y-aksen. Dernæst er rosettegage nummer 1 placeret i den kvarte cirkelring, jf. figur 4.2, for at sammenligne resultaterne med et punkt, der er placeret væk fra lastens angrebspunkt. Den sidste placering er de vandrette gages nummer 4 og (5), der er placeret et stykke ude af x-aksen, på begge sider af den massive cirkelskive, til vurdering af sammenhængen mellem de to sider. Enkeltgage nummer (7) er orienteret i y-retningen for at kunne vurdere om lasten er påført symmetrisk.



Figur 4.3: Placering af flytningsmåler på massiv cirkelskive.

Resultaterne fra gagene er i mikrostrain, og for at kunne beregne spændingerne ud fra disse anvendes teorien fra bilag A, hvor formel (4.1) anvendes, med regneretninger jf. figur 4.4.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{xx} \cdot \cos^2 \alpha - \varepsilon_{yy} \cdot \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$$
(4.1)



Figur 4.4: Orientering af rosettegages.

Udover gagene anvendes flytningsmålere til bestemmelse af længdeflytningen i forhold til lasten. Disse måler over en længde på 96 mm, jf. figur 4.3 og er placeret på hver side af den massive cirkelskive. For at sikre bedre sammenhæng mellem de målte værdier og de eksakte værdier anvendes resultaterne fra kalibreringen af flytningsmålerne fra forsøg 3.

I det følgende er resultaterne delt op i resultater fra gages og i resultater fra flytningsmålere. Der er udført to forsøg på elementet, og for disse er resultaterne opsamlet elektronisk. I det første forsøg påførtes en last fra 0 kN til 30 kN og tilbage til 0 kN og i det andet forsøg påførtes lasten fra 0 kN til 60 kN og tilbage til 0 kN. Lasten føres tilbage til 0 kN for at kontrollere om materialet er deformeret plastisk.

4.2 Resultater fra gages

I det følgende redegøres for resultaterne af rosettegage nummer 1, hvor der anvendes koordinatsystemet, som er defineret på figur 4.2, ved at opstille en lineær sammenhæng mellem kraft og spænding. Resultaterne fra de resterende rosettegages angives sidst på tabelform. Endvidere anvendes målingerne af enkeltgagene som kontrol af rosettegages, da de kun giver information om en længdetøjning. I det følgende anvendes målingerne fra forsøget, hvor lasten føres til 60 kN, idet resultaterne for de to forsøg er sammenfaldende.

Som funktion af lasten er normalspændingerne i x-retningen for rosettegage nummer 1 vist på figur 4.5, hvor der desuden vises en lineær regression mellem kraften og spændingerne.



Figur 4.5: Relation mellem kraft og normal spænding i x-aksen.

Forskellen mellem de beregnede spændinger på figur 4.5 er af samme størrelsesorden som ved de andre forsøg, da intervallet på den lodrette akse er meget lille i forhold til de øvrige resultater. Den lineære regression er parallelforskudt gennem (0,0) og udtrykket for spændingen som funktion af lasten er herved givet ved formel (4.2).

$$\sigma_{xx} = -0,009 \ \frac{1}{\mathrm{mm}^2} P \tag{4.2}$$

hvor

 σ_{xx} er normalspændingen [MPa] *P* er lasten [kN] Dernæst beregnes sammenhængen normalspændingerne i y-retningen som funktion af kraften. Resultaterne er vist på figur 4.6, hvor der også er vist en lineærregression af resultaterne.



Figur 4.6: Relation mellem kraft og normal spænding i y-aksen.

Den lineære regression er parallelforskudt gennem (0,0) og udtrykket for spændingen som funktion af lasten er herved givet ved formel (4.3).

$$\sigma_{yy} = -0,262 \ \frac{1}{\mathrm{mm}^2} P \tag{4.3}$$

Kraften som funktion af forskydningsspændingerne er i xy-retningen for rosettegage nummer 1 vist på figur 4.7, hvor der desuden vises en lineær regression mellem kraften og spændingerne.



Figur 4.7: Relation mellem kraft og forskydningsspænding.

Den lineære regression er parallelforskudt gennem (0,0), og udtrykket for spændingen som funktion af lasten er herved givet ved formel (4.4).

$$\sigma_{xy} = 0,0726 \ \frac{1}{\mathrm{mm}^2} P \tag{4.4}$$

hvor

 σ_{xy} er forskydningsspændingen [MPa]

Sammenhængene mellem last og spændinger er bestemt på samme vis som ovenfor og den lineære sammenhæng er givet ved (4.5), hvor parameteren α er givet i tabel 4.1.

 $\sigma = \alpha \cdot P \tag{4.5}$

hvor

 $\sigma \qquad \text{er spændingen [MPa]} \\ \alpha \qquad \text{er en parameter, der giver hældningen mellem } P \text{ og } \sigma \text{ [mm}^{-2]} \\ P \qquad \text{er lasten [kN]}$

Rosettegage	α_{xx}	α_{yy}	α_{xy}
1	-0,009	-0,262	0,0726
2	0,216	-0,621	-0,004
3	0,167	-0,78	0,003

Tabel 4.1: *Parameter, der giver sammenhæng mellem* $P \circ g \sigma$ *.*

Rosettegage	σ_{xx}	$\sigma_{_{yy}}$	σ_{xy}
1	-0,27	-7,86	2,18
2	6,48	-18,63	-0,12
3	5,01	-23,40	0,09

Til videre beregninger sættes P til 30 kN, hvorved spændingerne beregnes, jf. tabel 4.2.

 Tabel 4.2: Spænding i MPa for en last på 30 kN.

Til kontrol af målingerne anvendes enkeltgages. Enkeltgage 4 og (5) kan på grund af symetrisk placering, anvendes til sammenligning. Dernæst kan enkeltgage (7) sammenlignes med hovedtøjningen i y-aksen for rosettegage nummer 3, jf. figur 4.8. Enkeltgage nummer 6 er ikke anvendt, da denne ikke giver resultater, der har nogen praktisk anvendelse.



Figur 4.8: Målte tøjninger på begge sider af den massive cirkelskive.

Figur 4.8 indikerer, at der ikke er fejl i gagene og, at den største forskel mellem målingerne på for- og bagside er omkring 5%, hvilket ikke tages højde for i det følgende.

4.3 Resultater fra flytningsmålere

Resultaterne fra flytningsmålerne på for- og bagside af den massive cirkelskive er midlet og vist på figur 4.9, hvor tryk regnes positiv. Da der stort set er sammenfald mellem resultaterne fra forsøget, hvor lasten førtes til 30 kN og forsøget, hvor lasten førtes til 60 kN, er der kun vist resultaterne for det sidst nævnte forsøg. Der er lavet lineær regression af målepunkterne, og dernæst er linien parallelforskudt gennem (0,0), hvorved ligningen for regressionen er givet ved formel (4.6).

(4.6)

 $P = 977, 23 \cdot u$

hvor

Per lasten [kN]uer flytningen [mm]



Figur 4.9: Arbejdskurve for massiv cirkelskive.

Til yderligere kontrol af resultaterne sammenlignes flytningen på hver side af den massive cirkelskive. Resultaterne for de to flytningsmålere er plottet på figur 4.10 for det andet forsøg, hvor lasten førtes til 60 kN.



Figur 4.10: Differens mellem flytningsmålere.

4.4 Vurdering

Alle målinger viser, at der er en lineær sammenhæng mellem tøjninger og last, hvilket indikerer, at legemerne ikke var udsat for plastisk deformation.

Figur 4.8 viser, at der ikke er en betydelig forskel på tøjningerne på begge sider af den massive cirkelskive, hvilket yderligere understøtter, at resultaterne kan anvendes til en kvalificeret sammenligning med de analytiske og numeriske beregninger.

Resultaterne for flytningsmålerne er tilpasset ved hjælp af kalibreringerne, hvilket kun medfører en mindre korrektion på omkring 2%. Det vurderes, at den lineære regression beskriver forsøget tilfredsstillende og derfor anvendes formel (4.6) for at beskrive sammenhængene mellem flytninger og lasten for den massive cirkelskive.
Forsøg 5 Porøs cirkelskive

I dette forsøg bestemmes flytninger i den porøse cirkelskive for en given kraft med henblik på senere sammenligning med de numeriske modeller og de analytiske resultater. Forsøgsemnet er vist på figur 5.1, hvor lasten påføres øverst og nederst gennem tilpassede stålklodser og forsøgsemnet er ikke fastholdt. Flytningsmåleren placeres i kraftens retning gennem cirklens midte, jf. figur 5.1. For at kontrollere resultaterne placeres der endvidere en flytningsmåler på bagsiden af forsøgsemnet.



Figur 5.1: Porøs cirkelskive med flytningsmåler.

Den porøse cirkelskive er udført af aluminium, hvor porøsiteten opstår idet den homogene aluminiums cirkelskive er gennemboret af huller med en diameter på 8 mm. Aluminiumet har elasticitetsmodulen 78600 MPa og Poissons forhold 0,313, som bestemt i forsøg 1.

5.1 Fremgangsmåde

Der påføres en lodret last på den porøse cirkelskive gennem et tilpasset stålemne som skitseret på figur 5.2. Tykkelsen af skiven er 20 mm og hullerne, med en diameter på 8 mm, er alle udført med en indbyrdes vandret og lodret afstand, c/c, på 16 mm.



Figur 5.2: Porøscirkelskive med lasten P påført gennem tilpasset stålelement.

Til bestemmelse af flytninger anvendes en flytningsmåler, der måler over en længde på 96 mm, jf. figur 5.2. Der anvendes ikke straingages, fordi spændingerne har variationer mellem hullerne og en lille fejlplacering af en gage antages at give for upræcise resultater. For at sikre bedre sammenhæng mellem de målte værdier og de eksakte værdier anvendes resultaterne fra kalibreringen af flytningsmålerne fra forsøg 3.

5.2 Resultater

Der er udført to forsøg på elementet og for disse er resultaterne opsamlet elektronisk. I det første forsøg blev der påført en last fra 0 kN til 30 kN og tilbage til 0 kN og for det andet forsøg påførtes lasten ligeledes jævnt fra 0 kN til 60 kN og tilbage til 0 kN. Resultaterne er plottet på figur 5.3, hvor tryk regnes positiv og resultaterne er en middelværdi af målingerne på hver side af den porøse cirkelskive. Der er en mindre variation mellem de to kurver og denne variation kan skyldes målefejl. Der er lavet lineær regression af målingspunkterne og dernæst er linien parallelforskudt gennem (0,0), hvorved ligningen for regressionen er givet ved formel (5.1).

$$P = 607,062 \cdot u \tag{5.1}$$

hvor

Per kraften [kN]uer flytningen [mm]



Figur 5.3: Arbejdskurve for porøs cirkelskive.

Til yderligere kontrol af resultaterne sammenlignes flytningen på hver side af den porøse cirkelskive. Resultaterne for de to flytningsmålere er plottet på figur 5.4 for det andet forsøg, hvor lasten føres til 60 kN.



Figur 5.4: Differens mellem flytningsmålere.

5.3 Vurdering

Resultaterne fra begge forsøg ligger på en forholdsvis ret linie og ved aflastningen ender begge kurver i cirka (0,0), hvilket indikerer, at legemerne ikke har været udsat for plastisk deformation. For at mindske fejl på flytningsmålere er de målte resultater korrigeret efter forsøg 3, hvilket medfører en korrektion på omkring 2%. Figur 5.3 indikerer, at der er en lille forskel mellem de to forsøg. Denne forskel kan kun skyldes måleusikkerheder, idet de to forsøg blev kørt efter hinanden. Der kan også have været plastisk deformation, hvilket figur 5.4 ikke antyder. Det vurderes, at den lineære regression beskriver forsøget tilfredsstillende og derfor anvendes formel (5.1) for at beskrive sammenhængene mellem flytninger og kraften for den porøse cirkelskive.

Forsøg 6 Massiv cirkelring

I dette forsøg bestemmes flytninger i den massive cirkelring for en given kraft med henblik på senere sammenligning med de numeriske modeller og de analytiske udtryk. Forsøgsemnet er vist på figur 6.1, hvor lasten påføres øverst og nederst gennem tilpassede stålklodser og emnet ikke er fastholdt. Der var placeret en flytningsmåler i kraftens retning gennem cirklens midte, samt en på tværs af kraftens angrebslinie og ligeledes gennem centrum, jf. figur 6.1. For at kontrollere resultaterne placeres der endvidere en flytningsmåler på hver side af klodsen.



Figur 6.1: Massiv cirkelring med flytningsmålere.

Den massive cirkelring udføres af aluminiumet har elasticitetsmodulen 78600 MPa og Poissons forhold 0,313, som bestemt i forsøg 1.

6.1 Fremgangsmåde

Der påføres en lodret last på den massive cirkelring gennem tilpassede stålemner som skitseret på figur 6.2.



Figur 6.2: Massiv cirkelring med lasten P påført gennem tilpassede stålemner.

Til bestemmelse af flytninger anvendes flytningsmålere, der måler over længden 96 mm, jf. figur 6.2. For at sikre bedre sammenhæng mellem de målte værdier og de eksakte værdier anvendes resultaterne fra kalibreringen af flytningsmålerne fra forsøg 3.

6.2 Resultater

I det følgende er resultaterne for de vandrette og lodrette flytningsmålere delt i to afsnit. Målingerne for de lodrette og vandrette flytningsmålere er foretaget ved det samme forsøg.

6.2.1 Lodrette flytningsmålere

Der er udført to forsøg på elementet og for disse er resultaterne opsamlet elektronisk. I det første forsøg blev der påført en last fra 0 kN til 25 kN og tilbage til 0 kN og for det andet forsøg påførtes lasten fra 0 kN til 50 kN og tilbage til 0 kN. Resultaterne for de lodrette flytningsmålere er vist på figur 6.3, hvor tryk regnes positiv og resultatet er en middelværdi af målingerne på for- og bagside. Der er lavet lineær regression af målingerne og dernæst er linien parallelforskudt gennem (0,0), hvorved ligningen for regressionen er givet ved formel (6.1).

$$P = 447 \cdot u$$

(6.1)

hvor

Per kraften [kN]uer flytningen [mm]



Figur 6.3: Arbejdskurve for massiv cirkelring.

Til yderligere kontrol af resultaterne sammenlignes flytningen på hver side af den massive cirkelring. Resultaterne for de to flytningsmålere er plottet på figur 6.4 for det andet forsøg, hvor lasten blev ført til 50 kN.



Figur 6.4: Differens mellem flytningsmålere.

6.2.2 Vandrette flytningsmålere

Resultaterne for de vandrette flytningsmålere er vist på figur 6.5, hvor tryk regnes positiv og resultatet er en middel værdi af målingerne på for- og bagside. Der er lavet lineær regression af målingerne og dernæst er linien parallelforskudt gennem (0,0), hvorved ligningen for regressionen er givet ved formel (6.2).



Figur 6.5: Arbejdskurve for massiv cirkelring.

Til yderligere kontrol af resultaterne sammenlignes flytningen på hver side af den porøse cirkelring. Resultaterne for de to flytningsmålere er vist på figur 6.6 for det andet forsøg, hvor lasten jævnt førtes til 50 kN.



Figur 6.6: Differens mellem flytningsmålere.

6.3 Vurdering

Det fremgår af figur 6.4 og figur 6.6, at der stort set ikke er forskel mellem flytningsmålerne på hver side af den porøse cirkelring. Dernæst viser figur 6.3 og figur 6.5, at der er lineær sammenhæng mellem måleresultaterne, og at flytningen er nul, når kraften sættes til nul. Dette indikerer, at materialet er lineært elastisk og, at det ikke har været belastet til en plastisk tilstand. Derfor kan ovenstående resultater i form af formel (6.1) og formel (6.2) anvendes til sammenligning med de numeriske modeller og analytiske udtryk.

Forsøg 7 Porøs cirkelring

I dette forsøg bestemmes flytninger i den porøse cirkelring for en given kraft med henblik på senere sammenligning med de numeriske modeller og de analytiske udtryk. Forsøgsemnet er vist på figur 7.1, hvor lasten påføres øverst og nederst gennem tilpassede stålklodser og forsøgsemnet ikke er fastholdt. Der var placeret en flytningsmåler i kraftens retning, gennem cirklens midte, samt en på tværs af kraftens angrebslinie og ligeledes gennem centrum, jf. figur 7.1. For at kontrollere resultaterne var der placeret en flytningsmåler på modsatte side af den porøse cirkelring.



Figur 7.1: Porøs cirkelring med flytningsmåler.

Den porøse cirkelring er udført af aluminium, hvor porøsiteten opstår idet den homogene aluminiums cirkelring er gennemboret af huller med en diameter på 8mm. Aluminiumet har elasticitetsmodulen 78600 MPa og Poissons forhold 0,313, som bestemt i forsøg 1.

7.1 Fremgangsmåde

Der påføres en lodret last på den porøse cirkelring gennem et tilpasset stålemne som skitseret på figur 7.2. Tykkelsen af skiven er 20 mm og hullerne, med en diameter på 8 mm, er alle udført med en indbyrdes vandret og lodret afstand, c/c, på 16 mm.



Figur 7.2: Porøs cirkelring med lasten P påført gennem tilpassede stålemner.

Til bestemmelse af flytninger anvendes flytningsmålere, der måler over en længde på 96 mm, jf. figur 7.2. Der anvendes ikke straingages, fordi spændingerne har variationer mellem hullerne og en lille fejlplacering af en gage antages at give for upræcise resultater. For at sikre bedre sammenhæng mellem de målte værdier og de eksakte værdier anvendes resultaterne fra kalibreringen af flytningsmålerne fra forsøg 3.

7.2 Resultater

I det følgende er resultaterne for de vandrette flytningsmålere og lodrette flytningsmålere delt i to afsnit. Målingerne for de lodrette og vandrette flytningsmålere er foretaget ved det samme forsøg.

7.2.1 Lodrette flytningsmålere

Der er udført to forsøg på elementet og for disse er resultaterne opsamlet elektronisk. I det første forsøg blev der påført en last fra 0 kN til 15 kN og tilbage til 0 kN og for det andet forsøg påførtes lasten fra 0 kN til 30 kN og tilbage til 0 kN. Resultaterne for de lodrette flytningsmålere er plottet på figur 7.3, hvor tryk regnes positiv og resultaterne er en middelværdi af målingerne på hver side af den porøse cirkelskive. Der er lavet lineær regression af målingerne og dernæst er linien parallelforskudt gennem (0,0), hvorved ligningen for regressionen er givet ved formel (7.1). $P = 238 \cdot u \tag{7.1}$

hvor

Per kraften [kN]uer flytningen [mm]



Figur 7.3: Arbejdskurve for porøs cirkelring.

Til yderligere kontrol af resultaterne sammenlignes flytningen på hver side af den porøse cirkelring. Resultaterne for de to flytningsmålere er plottet på figur 7.4 for det andet forsøg, hvor lasten blev ført til 30 kN.



Figur 7.4: Differens mellem flytningsmålere.

7.2.2 Vandrette flytningsmålere

Resultaterne for de vandrette flytningsmålere er plottet på figur 7.5, hvor tryk regnes positiv og resultaterne er en middel værdi af målingerne på hver side af den porøse cirkelring. Der er lavet lineær regression af målingerne, og dernæst er linien parallelforskudt gennem (0,0), hvorved ligningen for regressionen er givet ved formel (7.2).

$$P = 410 \cdot u \tag{7.2}$$



Figur 7.5: Arbejdskurve for porøs cirkelring.

Til yderligere kontrol af resultaterne sammenlignes flytningen på hver side af den porøse cirkelring. Resultaterne for de to flytningsmålere er vist på figur 7.6 for det andet forsøg, hvor lasten blev ført til 30 kN.



Figur 7.6: Differens mellem flytningsmålere.

7.3 Vurdering

Det fremgår af figur 7.4 og figur 7.6, at der stort set ikke er forskel mellem flytningsmålerne på hver side af den porøse cirkelring. Dernæst viser figur 7.3 og figur 7.5, at der er lineær sammenhæng mellem måleresultaterne, og at flytningen går i nul når kraften sættes til nul. Dette indikerer, at materialet er lineært elastisk og, at det ikke har været belastet til en plastisk tilstand. Derfor kan ovenstående resultater i form af formel (7.1) og formel (7.2) anvendes til sammenligning med de numeriske modeller og analytiske udtryk.